

CHRISTIAN LE PROVOST  
MELIO SAENZ  
Université de Grenoble I  
Institut de Mécanique

**SYMULATION NUMÉRIQUE DE LA PROPAGATION NON-LINÉAIRE  
D'UNE ONDE LONGUE DANS UN CANAL DE PROFONDEUR  
CONSTANTE. COMPARAISON DE QUELQUES MÉTHODES AUX  
DIFFERENCES FINIES**

Table des matières: 1. Position du problème et sa solution analytique, 2. Description des algorithmes aux différences finies utilisés, 3. Résultats numériques, 4. Conclusions; Streszczenie; Summary; Bibliographie.

Une précision de plus en plus grande est actuellement recherchée dans la représentation des phénomènes marins intervenant dans la dynamique des zones littorales. Prenons un seul exemple: l'étude de la pollution côtière dans une mer à marée: la connaissance classique de la „marée moyenne” ne suffit plus, il est nécessaire maintenant de connaître avec précision les courants moyens, dont une partie importante est engendrée par les effets non-linéaires qui accompagnent les ondes de marée dans leur propagation. Or l'étude de ces phénomènes secondaires est difficile. Des problèmes délicats apparaissent en particulier dans leur simulation numérique, du fait de ces non-linéarités. Le contrôle des performances des différents algorithmes utilisables ne se fait par exemple classiquement que de deux façons: par comparaison aux données expérimentales, cf. Dronkers [2], ou par analyse de stabilité des schémas utilisés, cf. Lax [3]. Excluant le premier type de contrôle dont l'application est très limitée, faute de mesures expérimentales, la deuxième méthode s'avère impuissante pour donner un élément d'appréciation des qualités de représentation des phénomènes non-linéaires, puisqu'elle nécessite a priori une linéarisation des équations du problème posé.

De telles comparaisons sont cependant possibles dans de rares cas: lorsqu'il existe une solution analytique exacte au problème non-linéaire posé. Il en est ainsi du problème qui nous intéresse ici: celui de la propagation d'une onde longue dans un canal de profondeur constante, étudiée dans l'approximation des ondes longues, en l'absence de frot-



tement. Nous connaissons en effet une solution analytique exacte de ce problème non-linéaire donnée par A. Temperville en [8] et [9].

L'objet de cet exposé est de présenter une étude comparative des erreurs auxquelles conduisent un certain nombre de méthodes classiques d'intégration de ce problème par des techniques numériques aux différences finies, les solutions numériques étant comparées à la solution analytique exacte.

## 1. POSITION DU PROBLÈME ET SA SOLUTION ANALYTIQUE

### 1.1. Equations du problème

Soit un canal de longueur infinie, présentant à  $t = 0$  une profondeur constante  $h$ , nous étudions la propagation d'une onde longue se propageant dans ce canal, a priori au repos, à partir de l'abscisse  $x = 0$ . L'onde est engendrée à l'entrée du canal suivant une loi que nous préciserons dans la suite. Nous nous intéressons aux ondes très longues, du type onde de marée pour une profondeur moyenne de 50 m, la longueur d'onde principale de ce type de phénomène est de 1000 km; nous adoptons en conséquence les hypothèses des ondes longues: les équations liant la dénivellation  $\zeta$  au courant  $u$ , au point d'abscisse  $x$ , au temps  $t$ , sont donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h + \zeta) u &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$g$  est ici l'accélération de la gravité. Ces équations sont classiques: la première exprime la conservation de la masse, et la seconde est l'équation dynamique traduisant l'équilibre entre les forces de gravité et de pression et l'inertie. (1) peut se mettre sous la forme dite „conservative”:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) &= 0 \\ \text{avec } U = \begin{vmatrix} \zeta \\ u \end{vmatrix} \text{ et } F(U) = \begin{vmatrix} (h + \zeta) u \\ \frac{u^2}{2} + g\zeta \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Ce problème est de toute évidence non-linéaire. Une solution exacte peut être obtenue par la méthode des caractéristiques dans la mesure où l'on adopte une forme adéquate des conditions aux limites (cf. Temperville [8, 9]).



## 1.2. Solution analytique

Considérant le problème par la méthode classique des caractéristiques, il est aisé de calculer la pente des deux courbes caractéristiques passant par chaque point M du plan des variables  $x$  et  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = u + \varepsilon \sqrt{g(h + \zeta)} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \quad (3)$$

et d'établir que, sur chacune de ces caractéristiques, dont l'une est une droite (celle à pente positive), les relations bicaractéristiques se réduisent aux égalités suivantes:

$$u + 2\varepsilon \sqrt{g(h + \zeta)} = C^{rc} = \begin{cases} \alpha & \text{si } \varepsilon = +1 \\ \beta & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad (4)$$

Ces quantités sont appelés invariants de Riemann. Il suffit donc de se donner au point  $x = 0$  la valeur de  $\alpha$  à chaque instant pour définir complètement le problème, la valeur de l'invariant  $\beta$  correspondant à la caractéristique de pente négative étant en effet donnée par la situation du repos en aval de l'onde dans le canal. Posant ainsi  $\alpha$  sous la forme:

$$\alpha = 2\sqrt{gh} + f(t_0) \quad (5)$$

on en déduit, après quelques calculs, la forme paramétrique de la solution correspondante au point M ( $x, t$ ):

$$\begin{aligned} u &= \frac{f(t_0)}{2} \\ \zeta &= \frac{1}{2} f(t_0) \left[ \frac{1}{8g} f(t_0) + \sqrt{\frac{h}{g}} \right] \\ x &= (t - t_0) \left[ \sqrt{gh} + \frac{3}{4} f(t_0) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Le paramètre  $t_0$  correspond dans le plan ( $x, t$ ) à l'ordonnée en  $x = 0$  de la droite caractéristique ( $\varepsilon = +1$ ) passant par M. Et nous voyons, d'après (6) que la fonction  $f(t_0)$  représente, à une constante près, la vitesse du mouvement imposé par la condition (5) en  $x = 0$ .

Choisissant d'étudier la propagation d'une onde ayant des caractéristiques sinusoïdales, à l'entrée du canal, nous prenons donc comme expression de la fonction  $f(t_0)$  la forme suivante:

$$f(t_0) = 2A \sin \omega t_0 \quad (7)$$

où  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  est la pulsation de l'onde de période  $T$  ainsi considérée et  $A$  est l'amplitude de la vitesse à l'entrée du canal. Ceci revient à se donner un champ de vitesse sinusoïdal à l'entrée du canal, mais notons que la loi de variation de la dénivellation correspondante n'est pas, elle, sinusoïdale.



Nous avons tracé sur les graphiques 2 et suivants la courbe  $\zeta(x)$  au long du canal au temps  $t = 2T$  (courbe 2 des graphiques (a)) pour une onde de caractéristiques suivantes:  $h = 50$  m,  $A = 1,5$  m/s,  $T = 44700$  s = 12 h 25' (période de l'onde de marée lunaire),  $\lambda = \sqrt{gh} T = 999$  km ( $\lambda$  longueur d'onde du phénomène).

Nous constatons que l'onde se cambre au fur et à mesure de sa propagation dans le canal. Théoriquement, elle présente un profil à tangente verticale à l'abscisse critique  $x_c = \frac{\lambda \sqrt{gh}}{3\pi A}$ . En ce point, il devrait y avoir physiquement déferlement, mais il ne faut pas perdre de vue que nous considérons ici la déformation d'une onde longue au cours de sa propagation en faisant abstraction du frottement. Lorsque le frottement est pris en compte, il a pour effet d'amortir l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation, de sorte que celle-ci n'atteint jamais le déferlement (dans des conditions correspondant à une marée réelle). Ici, par contre, il est nécessaire de limiter les calculs au domaine  $x \in [0, x_c]$ , la solution numérique devenant instable au voisinage de  $x_c$ .

## 2. DESCRIPTION DES ALGORITHMES AUX DIFFÉRENCES FINIES UTILISÉS

Nous allons rappeler brièvement les caractéristiques principales des quatre schémas de discrétisation utilisés pour intégrer numériquement le problème défini par le système d'équations (1) et la condition à la limite (5), pour un canal initialement au repos. Ces quatre schémas sont classiques: le premier est basé sur les méthodes des caractéristiques, le second est le schéma de premier ordre „diffusif”, le troisième est le schéma de second ordre de „Lax, Wendroff”, ces trois premiers schémas étant de type explicite. Le quatrième schéma utilisé est de nature implicite, et dû à Preissmann.

### 2.1. Schéma des caractéristiques

Il existe différentes méthodes d'intégration numérique des problèmes aux différences finies hyperboliques basés sur la théorie analytique des caractéristiques, cf. Schonfeld [7]. Nous avons utilisé, dans le cadre du présent travail, la méthode la plus simple, dite de „pente initiale”.

Considérons dans le plan  $(x, t)$  un maillage régulier avec un pas d'espace  $\Delta x$  et un pas de temps  $\Delta t$ , cf. fig. 1 a. Comme nous l'avons noté plus haut, par un point  $M$  quelconque du plan  $(x, t)$ , passent deux cour-



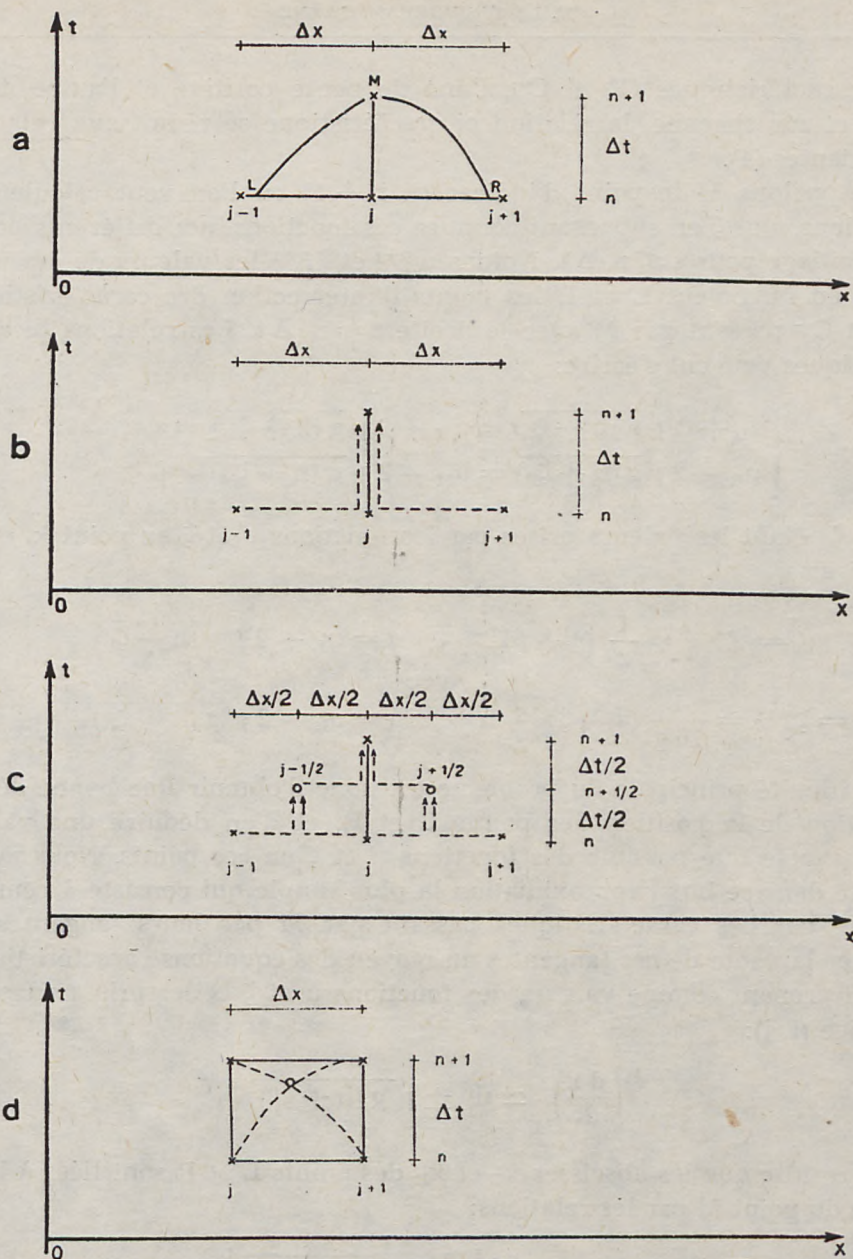


Fig. 1. Description graphique des opérateurs aux différences finies:  
 $x$ — $x$  opérateur de temps,  
 $x$ — $x$  opérateur d'espace,  
 a. méthode des caractéristiques,  
 b. schéma diffusif,  
 c. schéma de Lax-Wendroff,  
 d. schéma de Preissmann

Ryc. 1. Opis graficzny operatorów o różnicach skończonych:  
 $x$ — $x$  operator czasu,  
 $x$ — $x$  operator przestrzeni,  
 a — metoda charakterystyk,  
 b — schemat dyfuzyjny,  
 c — schemat Lax-Wendroffa,  
 d — schemat Preissmanna



bes caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$ , l'une de pente positive et l'autre négative, et sur chacune, la relation bicaractéristique se réduit aux relations invariantes (4).

Appelons  $M$  le point d'indices  $(j, n+1)$  où l'on veut calculer les fonctions  $u$  et  $\zeta$  en supposant connues ces fonctions aux différents points de maillage pour  $t \leq n \cdot \Delta t$ . Notons  $u_j^{n+1}$  et  $\zeta_j^{n+1}$  les valeurs de ces fonctions en  $M$ . Soient  $L$  et  $R$  les points d'intersection des caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$  passant par  $M$  avec la droite  $t = n \cdot \Delta t$ . Les relations bicaractéristiques peuvent s'écrire:

$$\begin{cases} u_L + 2\sqrt{g(h + \zeta_L)} = u_M + 2\sqrt{g(h + \zeta_M)} = \alpha \\ u_R - 2\sqrt{g(h + \zeta_R)} = u_M - 2\sqrt{g(h + \zeta_M)} = \beta \end{cases} \quad (8)$$

$u_k$  et  $\zeta_k$  étant les valeurs prises par les fonctions  $u$  et  $\zeta$  au point  $k$ , et en déduire:

$$\begin{aligned} u_M = u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta) & \alpha &= u_L + 2\sqrt{g(h + \zeta_L)} \\ \zeta_M = \zeta_j^{n+1} &= \frac{1}{16g} (\alpha - \beta)^2 - h & \beta &= u_R - 2\sqrt{g(h + \zeta_R)} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad (9)$$

La difficulté principale du problème est donc d'obtenir une bonne détermination de la position des points  $L$  et  $R$ , et d'en déduire une valeur aussi exacte que possible des fonctions  $u$  et  $\zeta$  en ces points. Nous avons adopté dans ce but l'approximation la plus simple qui consiste à remplacer les courbes caractéristiques passant par  $M$  par leurs tangentes, et estimer la pente de ces tangentes au moyen des équations caractéristiques (3) en prenant comme valeurs des fonctions  $u$  et  $\zeta$  celles prises au point d'indice  $(i, j)$ :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_M \simeq u_j^n \pm \sqrt{g(h + \zeta_j^n)}$$

Il en résulte que les abscisses  $x_L$  et  $x_R$  des points  $L$  et  $R$  sont liées à l'abscisse du point  $M$  par les relations:

$$\begin{aligned} x_M - x_L &= \Delta t \left[ u_j^n + \sqrt{g(h + \zeta_j^n)} \right] \\ x_M - x_R &= \Delta t \left[ u_j^n - \sqrt{g(h + \zeta_j^n)} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Connaissant les valeurs des fonctions  $u$  et  $\zeta$  à  $t = n \cdot \Delta t$  en tous les points d'abscisse  $k \cdot \Delta x$ , on en déduit par interpolation leurs valeurs aux points  $L$  et  $R$ .



## 2.2. Le schéma diffusif

Les schémas les plus simples pour discrétiser les opérateurs d'espace et de temps  $\frac{\partial U}{\partial t}$  et  $\frac{\partial U}{\partial x}$  sont l'opérateur d'espace centré

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2 \Delta x}$$

et l'opérateur de temps „en avant”

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} \quad (\text{cf. fig. 1b})$$

Mais l'analyse de leur stabilité montre que, quels que soient  $\Delta x$  et  $\Delta t$ , les schémas construits à l'aide de ces opérateurs sont instables, cf. Cunge [1]. Pour corriger ces instabilités, le schéma diffusif a été développé en gardant l'opérateur d'espace centré ci-dessus, mais en introduisant un opérateur de temps du type:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_j^{n+1} - [\alpha U_j^n + (1 - \alpha)/2 (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)]}{\Delta t} \quad (11)$$

avec  $\alpha \in [0,1]$ .  $\alpha$  est appelé coefficient diffusif. Nous ne nous étendrons pas ici sur le rôle de ce coefficient. Notons simplement que pour les applications présentées ici, nous avons utilisé les valeurs  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 0,1$ .

## 2.3. Le schéma de Lax-Wendroff

Cette méthode repose sur la formulation des équations du problème sous la forme conservative (2). A partir de cette formulation, il est en effet possible de remplacer dans le développement classique en série de Taylor du vecteur solution  $U$ :

$$U(x, t + \Delta t) = U(x, t) + \Delta t \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \dots \quad (12)$$

la dérivée partielle par rapport au temps  $\frac{\partial U}{\partial t}$  par la dérivée partielle d'espace  $-\frac{\partial}{\partial x} F(U)$  qui lui correspond, moyennant (2), cf. Lax-Wendroff [4]. Cette dernière quantité est estimée à un pas de temps intermédiaire par application d'un opérateur du premier ordre, cf. Rychtmier et Morton [6] (cf. fig. 1 c). D'où la formulation aux différences:



$$\begin{aligned}
 U_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_j^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} [F(U)_{j+1}^n - F(U)_j^n] \\
 U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U)_{j+1/2}^{n+1/2} - F(U)_{j-1/2}^{n+1/2}]
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

dans laquelle les notations du type  $X_{j+1/2}^{n+1/2}$  correspondent à la valeur de la fonction  $X$  au point  $\left[ \left( j + \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right]$ . Pour une valeur donnée du rapport  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ , ce schéma conduit à une précision du second ordre.

#### 2.4. Le schéma de Preissmann

Les limitations imposées par la condition de stabilité dans les algorithmes explicites du genre de ceux présentés précédemment, ont été à l'origine du développement des schémas implicites. Ceux-ci reposent sur la détermination simultanée de la valeur des fonctions inconnues en tous les points du maillage d'espace au temps  $(n+1) \Delta t$  à partir de leur connaissance aux intervalles de temps inférieurs. Leur mise en oeuvre conduit à la résolution de systèmes d'équations algébriques.

Le schéma de Preissmann, développé depuis 1960, utilise les opérateurs linéaires suivants:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \Theta \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \Theta) \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} \\
 \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j+1}^n + U_j^{n+1} - U_j^n}{2 \Delta t}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

En prenant comme valeur moyenne de la fonction  $U$  sur la maille considérée:

$$U = \frac{\Theta}{2} (U_{j+1}^{n+1} + U_j^{n+1}) + \frac{1 - \Theta}{2} (U_{j+1}^n + U_j^n)$$

où  $0,5 \leq \Theta \leq 1$  est un coefficient de pondération.

### 3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Ces différents algorithmes ont donc été utilisés pour simuler numériquement la propagation d'une onde longue dans les conditions citées au § 1.2: dans un canal de 50 m de profondeur, l'onde considérée est excitée à la période de 44 700 s de façon à avoir une amplitude du vecteur vitesse



à l'entrée du canal de l'ordre de 1,5 m/s, ce qui conduit à une amplitude de la dénivellation de l'ordre de 3,30 m. Les graphiques 2 à 7 présentent les résultats obtenus par ces différentes simulations à  $t = 2T$ , c'est-à-dire lorsque le premier front de l'onde a atteint la zone théorique de déferlement. Nous allons commenter successivement ces différents résultats et les comparer à la solution analytique décrite au § 1.2.

### 3.1. Schéma diffusif

Les résultats présentés sur la figure 2a concernent une simulation numérique réalisée avec le schéma diffusif en ayant choisi comme pas d'espace et de temps:

$$\Delta x = \lambda/30$$

$$\Delta t = T/32$$

ce qui correspond à un rapport  $\Delta x/\Delta t/\sqrt{gh} = 1,0667$ : nous sommes ainsi aussi voisin que possible de la valeur critique de la condition de stabilité:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq u + \sqrt{g(h + \zeta)}$$

Le profil de la surface libre du canal obtenu numériquement au bout du temps  $t = 2T$  correspond à la courbe (1) en traits pleins. Comparant ce profil à la solution analytique exacte (courbe (2) en pointillés), on constate que la solution numérique s'écarte de la solution analytique de façon appréciable au-delà d'une longueur d'onde du phénomène, et présente des écarts très importants, de l'ordre du mètre au droit du front avant de l'onde étudiée. Notons que l'amplitude maximale de la dénivellation de la solution numérique s'amortit au cours de la propagation et que sa cambrure est moins forte qu'elle ne l'est sur la solution exacte.

Un affinement du maillage réduit naturellement ces erreurs: sur la figure (2b) les courbes d'écart  $\epsilon$  entre la solution analytique et la solution numérique, correspondant à des pas d'espaces différents (1:  $\Delta x/\lambda = 30$ ; 2:  $\Delta x/\lambda = 60$ ; 3:  $\Delta x/\lambda = 90$ ) montrent la façon dont ces erreurs se résorbent en affinant le maillage. Notons que ces courbes correspondent à la même valeur du paramètre  $\Delta x/\Delta t/\sqrt{gh} = 1,0667$ .

### 3.2. Schéma des caractéristiques

Les courbes présentées sur les figures (3a) et (3b) sont du même type que celles présentées au chapitre précédent. Les erreurs sont inférieures à celles trouvées pour la schéma diffusif. Notons que l'on retrouve ici aussi le même amortissement de la solution numérique au cours



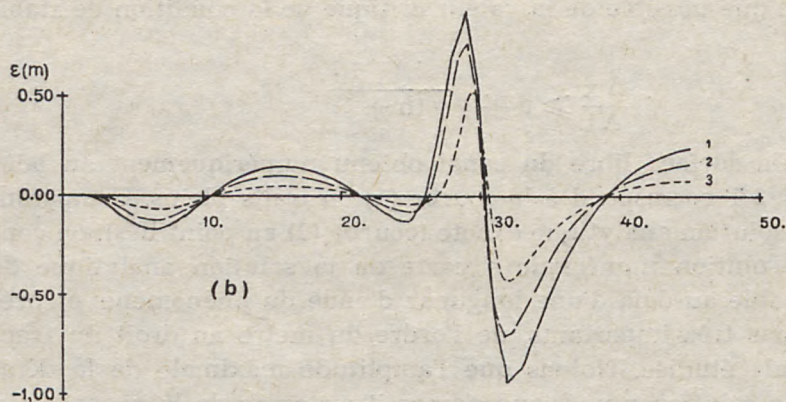
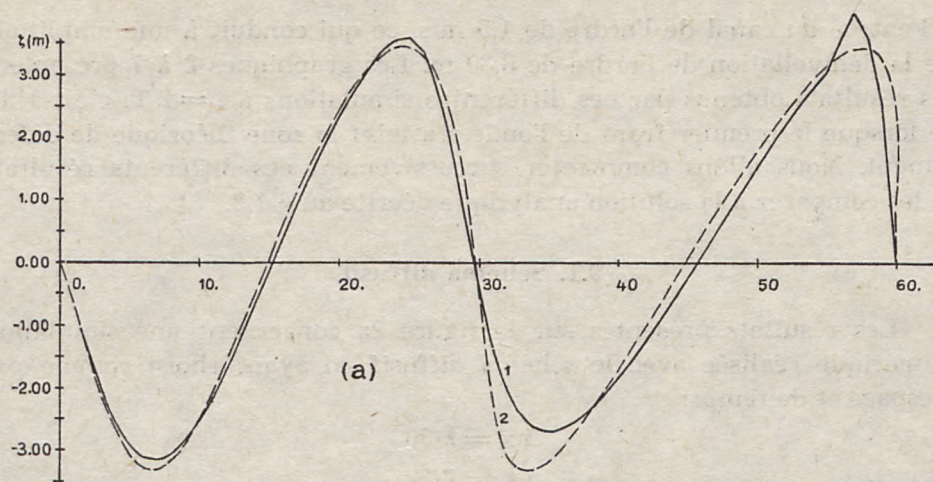


Fig. 2. Comparaison de la solution analytique (2) et de la solution numérique (1) pour le schéma diffusif:

- a. tracé de l'élévation au long du canal à  $t = 2T$  avec  $\Delta t/T = 0,031$  et  $\Delta x/\lambda = 0,033$ ,  
 b. Ecart entre les courbes (1) et (2) au long du canal à  $t = 2T$  pour  $\Delta x/\lambda = 0,033$  (courbe 1); 0,0167 (courbe 2); 0,0111 (courbe 3);  $\alpha = 0,0$  et  $\Delta x/\Delta t = C^{te}$

Ryc. 2. Porównanie rozwiązania analitycznego (2) i rozwiązania numerycznego (1) dla schematu dyfuzyjnego:

a — przebieg wzniesienia wzdłuż kanału w chwili  $t = 2T$  przy  $\frac{\Delta t}{T} = 0,031$  oraz

$$\frac{\Delta x}{\lambda} = 0,033,$$

b — odchyłki pomiędzy krzywą (1) i (2) wzdłuż kanału w chwili  $t = 2T$  przy  $\frac{\Delta x}{\lambda} =$

$= 0,033$  (krzywa 1); przy 0,0167 (krzywa 2); przy 0,0111 (krzywa 3);  $\alpha = 0,0$  i  $\frac{\Delta x}{\Delta t} =$

$= C^{te}$



de la propagation de l'onde. Le front avant de cette onde est cependant mieux représenté par ce schéma que par le précédent. Naturellement, un affinement du maillage réduit erreurs (cf. fig. 3b).

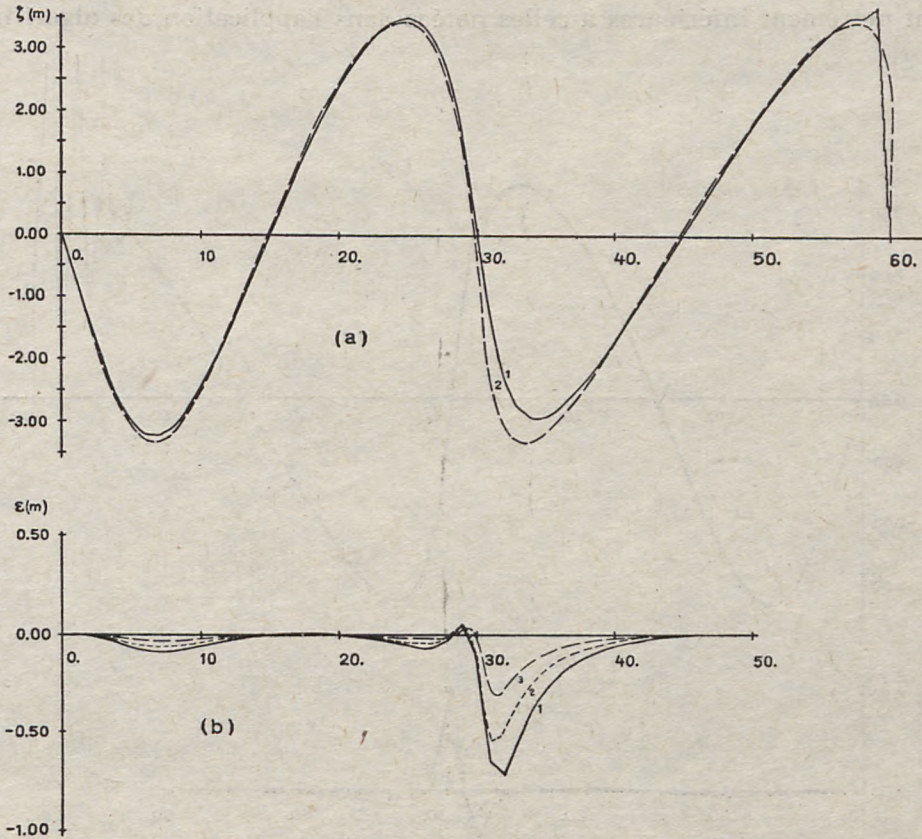


Fig. 3. Comparaison de la solution analytique (2) et de la solution numérique (1) pour le schéma des caractéristiques

- a. tracé de l'élévation au long du canal à  $t = 2T$  avec  $\Delta t/T = 0,031$  et  $\Delta x/\lambda = 0,033$ ,  
 b. Ecarts entre les courbes (1) et (2) au long du canal à  $t = 2T$  pour  $\Delta x/\lambda = 0,033$  (courbe 1); 0,0167 (courbe 2); 0,0111 (courbe 3); et  $\Delta x/\Delta t = C^{te}$

Ryc. 3. Porównanie rozwiązania analitycznego (2) i rozwiązania numerycznego (1) dla schematu charakterystyk:

- a — przebieg wzniesienia wzdłuż kanału w chwili  $t = 2T$  przy  $\frac{\Delta t}{T} = 0,031$  oraz  $\frac{\Delta x}{\lambda} = 0,033$ ,  
 b — odchyłki pomiędzy krzywą (1) i (2) wzdłuż kanału w chwili  $t = 2T$  przy  $\frac{\Delta x}{\lambda} = 0,033$  (krzywa 1); przy 0,0167 (krzywa 2); przy 0,0111 (krzywa 3); i  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = C^{te}$



## 3.3. Schéma de Lax-Wendroff

Les performances de ce schéma sont très satisfaisantes; les erreurs que l'on observe entre la solution numérique et la solution analytique sont nettement inférieures à celles notées dans l'application des algorithm-

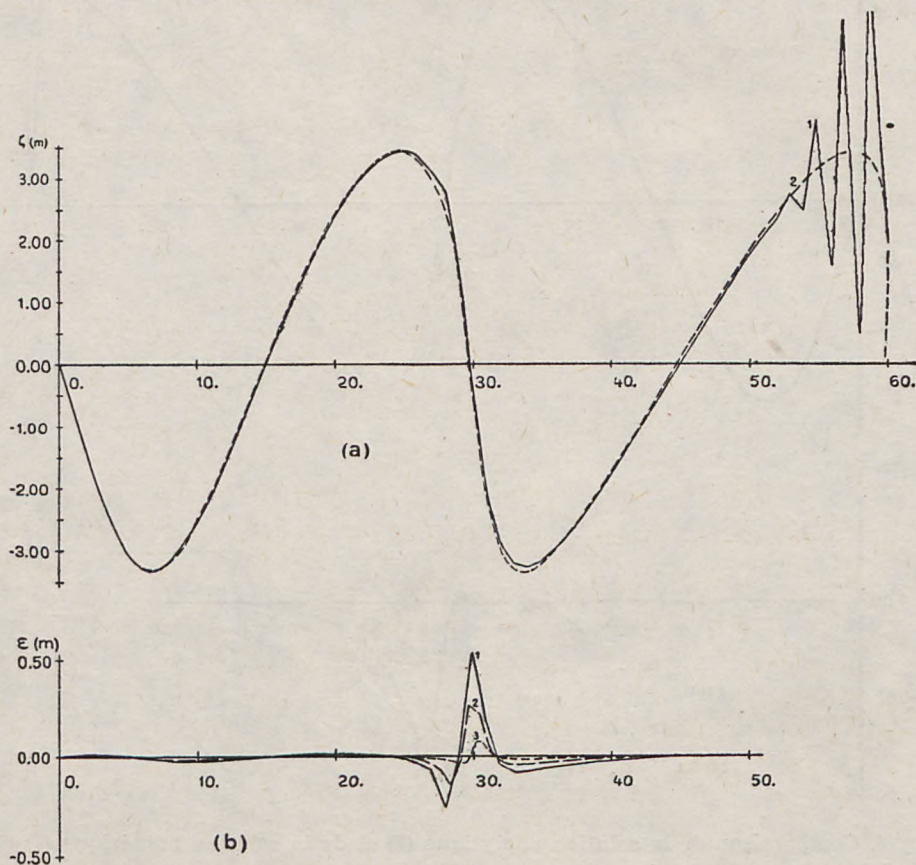


Fig. 4. Comparaison de la solution analytique (2) et de la solution numérique (1) pour le schéma de Lax-Wendroff:

- a. tracé de l'élévation au long du canal à  $t = 2T$  avec  $\Delta t/T = 0,031$  et  $\Delta x/\lambda = 0,033$ ,  
 b. Ecart entre les courbes (1) et (2) au long du canal à  $t = 2T$  pour  $\Delta x/\lambda = 0,033$  (courbe 1); 0,0167 (courbe 2); 0,0111 (courbe 3); et  $\Delta x/\Delta t = C^{te}$

Ryc. 4. Porównanie rozwiązania analitycznego (2) i rozwiązania numerycznego (1) dla schematu lax-Wendroffa:

- a — przebieg wzniesienia wzdłuż kanału w chwili  $t = 2T$  przy  $\frac{\Delta t}{T} = 0,031$  oraz  $\frac{\Delta x}{\lambda} = 0,033$ ,  
 b — odchyłki pomiędzy krzywą (1) i (2) wzdłuż kanału w chwili  $T = 2T$  przy  $\frac{\Delta x}{\lambda} = 0,033$  (krzywa 1); przy 0,0167 (krzywa 2); 0,0111 (krzywa 3) i  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = C^{te}$



mes précédents: seule une erreur de phase demeure au droit du front d'onde, mais celle-ci se résorbe rapidement en affinant le maillage, cf. fig. 4a et 4b.

### 3.4. Schéma de Preissmann

C'est ce schéma qui permet d'obtenir les meilleurs résultats lorsqu'il est utilisé dans les mêmes conditions que précédemment, c'est-à-dire au voisinage de la valeur critique du critère de stabilité: seul un léger déphasage apparaît entre la solution numérique et la solution analytique au-delà d'une longueur d'onde dans le canal. Un affinement du maillage a par ailleurs pour effet de conduire à une solution quasi parfaite, cf. fig. 5a et 5b.

### 3.5. Comparaison de ces résultats

Nous constatons que, pour tous les schémas utilisés, la solution numérique présente une erreur maximum au voisinage du front de l'onde qui se raidit au fur et à mesure de sa propagation (cf. courbes b des figures 2, 3, 4 et 5); ce fait se comprend aisément: c'est dans cette zone que le calcul est le plus sensible à la taille des mailles d'espace et de temps utilisées. Naturellement, le raffinement du maillage réduit ces erreurs. Nous avons reporté sur la figure 6 les maximums d'erreurs donnés par ces différents calculs dans les mêmes conditions de stabilité, pour des pas d'espace et de temps de plus en plus petits: nous voyons que le schéma de Lax-Wendroff est de loin le plus sensible à ce raffinement du maillage. Prenant comme référence l'erreur maximale constatée pour chaque calcul avec un pas d'espace  $\Delta x = 0,0333$  et un pas de temps  $\Delta t = 0,031 T$ , cette erreur n'atteint plus que 6% de la précédente si l'on divise par trois les intervalles  $\Delta x$  et  $\Delta t$ , alors qu'elle correspond encore à 15% de celle-ci pour le schéma implicite, et 40% et 50% pour le schéma des caractéristiques et le schéma diffusif, cf. tableau.

Tableau

Rapport de réduction de l'erreur maximale en fonction  
du raffinement du maillage

$\Delta x/\lambda$	Méthodes			
	diffusif	caractéristiques	Lax-Wendroff	Preissmann
0,03	1	1	1	1
0,0167	0,81	0,73	0,50	0,57
0,0111	0,51	0,42	0,06	0,15



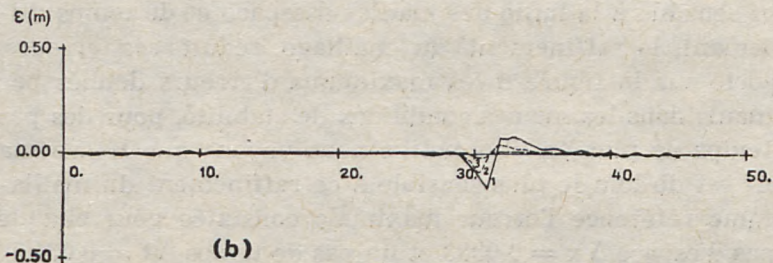
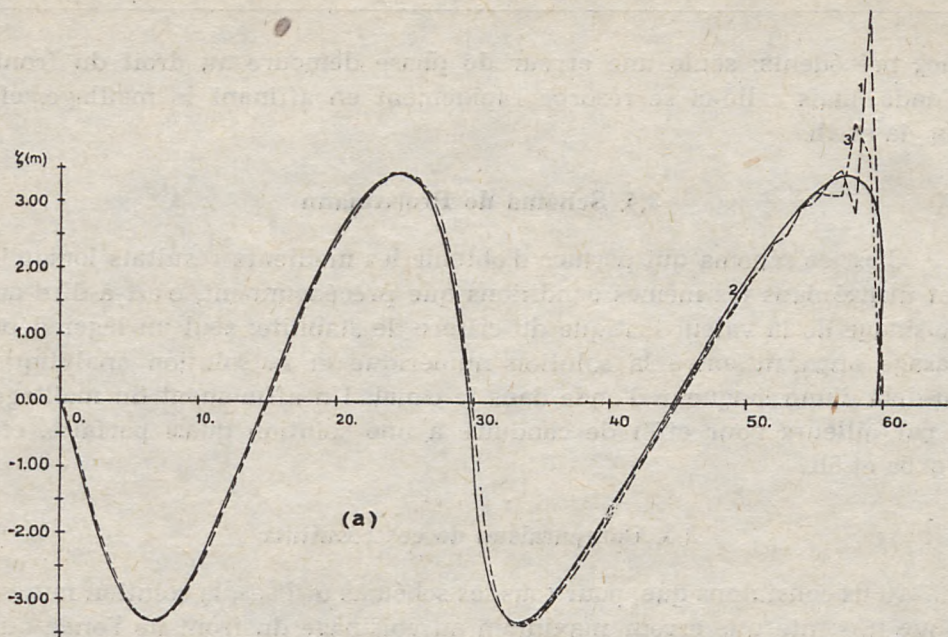


Fig. 5. Comparaison de la solution analytique (2) et de la solution numérique (1) pour le schéma de Preissmann.

a. tracé de l'élévation au long du canal à  $t = 2T$  pour  $\Delta x/\lambda = 0,033$  et  $\Delta t/T = 0,031$  (courbe 1) ou  $\Delta t/T = 0,033$  (courbe 3),

b. Ecarts entre les courbes (1) et (2) au long du canal à  $t = 2T$  pour  $\Delta x/\lambda = 0,033$  (courbe 1); 0,0167 (courbe 2); 0,0111 (courbe 3);  $\Delta t/T = 0,031$   $\Theta = 0,50$  et  $\Delta x/\Delta t = C^{te}$

Ryc. 5. Porównanie rozwiązania analitycznego (2) i rozwiązania numerycznego (1) dla schematu Preissmanna:

a — przebieg wzniesienia wzdłuż kanału w chwili  $t = 2T$  przy  $\frac{\Delta x}{\lambda} = 0,033$  oraz  $\frac{\Delta t}{T} = 0,031$  (krzywa 1) lub  $\frac{\Delta t}{T} = 0,033$  (krzywa 3),

b — odchyłki pomiędzy krzywą (1) i (2) wzdłuż kanału w chwili  $t = 2T$  przy  $\frac{\Delta x}{\lambda} = 0,033$  (krzywa 1); przy 0,0167 (krzywa 2); przy 0,0111 (krzywa 3);  $\frac{\Delta t}{T} = 0,031$   $\Theta = 0,50$  oraz  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = C^{te}$



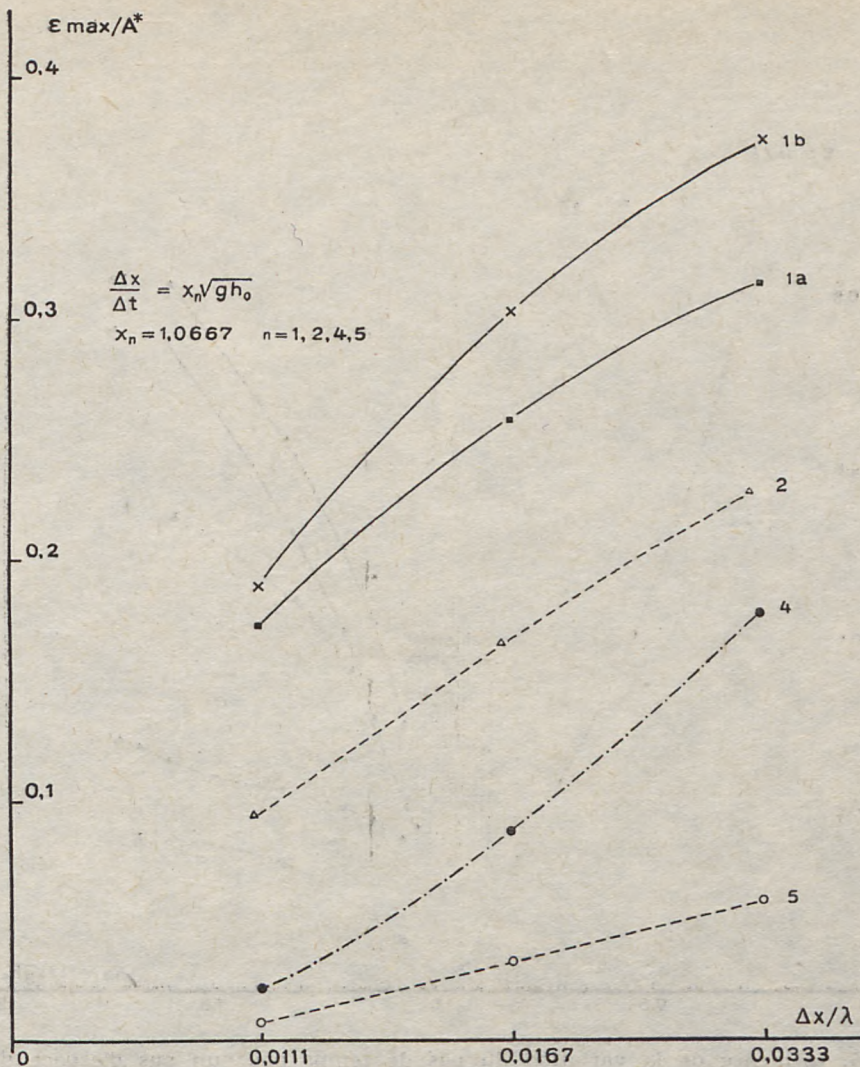


Fig. 6. Effet de raffinement du maillage sur l'écart maximal apparaissant entre la solution analytique et la solution numérique à  $t = 2T$ , dans les mêmes conditions de stabilité ( $\Delta x / \Delta t = C^{te}$ ):

- 1 a — schéma diffusif  $\alpha = 0$ ,
- 1 b — schéma diffusif  $\alpha = 0,1$ ,
- 2 — schéma des caractéristiques,
- 4 — schéma de Lax-Wendroff,
- 5 — schéma de Preissmann  $\Theta = 0.50$ .

$\varepsilon_{\max}/A^*$ : écart maximal relatif par rapport à l'amplitude maximale de l'onde étudiée

Ryc. 6. Wpływ zagęszczenia siatki na maksymalną odchyłkę występującą pomiędzy rozwiązaniem analitycznym i numerycznym w chwili  $t = 2T$  w tych samych warunkach stabilności ( $\frac{\Delta x}{\Delta t} = C^{te}$ ):

- 1 a — schemat dyfuzyjny  $\alpha = 0$ ,
- 1 b — schemat dyfuzyjny  $\alpha = 0,1$ ,
- 2 — schemat charakterystyk,
- 4 — schemat Lax-Wendroffa,
- 5 — schemat Preissmanna  $\Theta = 0.50$ .

$\frac{\varepsilon_{\max}}{A^*}$ : maksymalna odchyłka względna w odniesieniu do maksymalnej amplitudy badanej fali



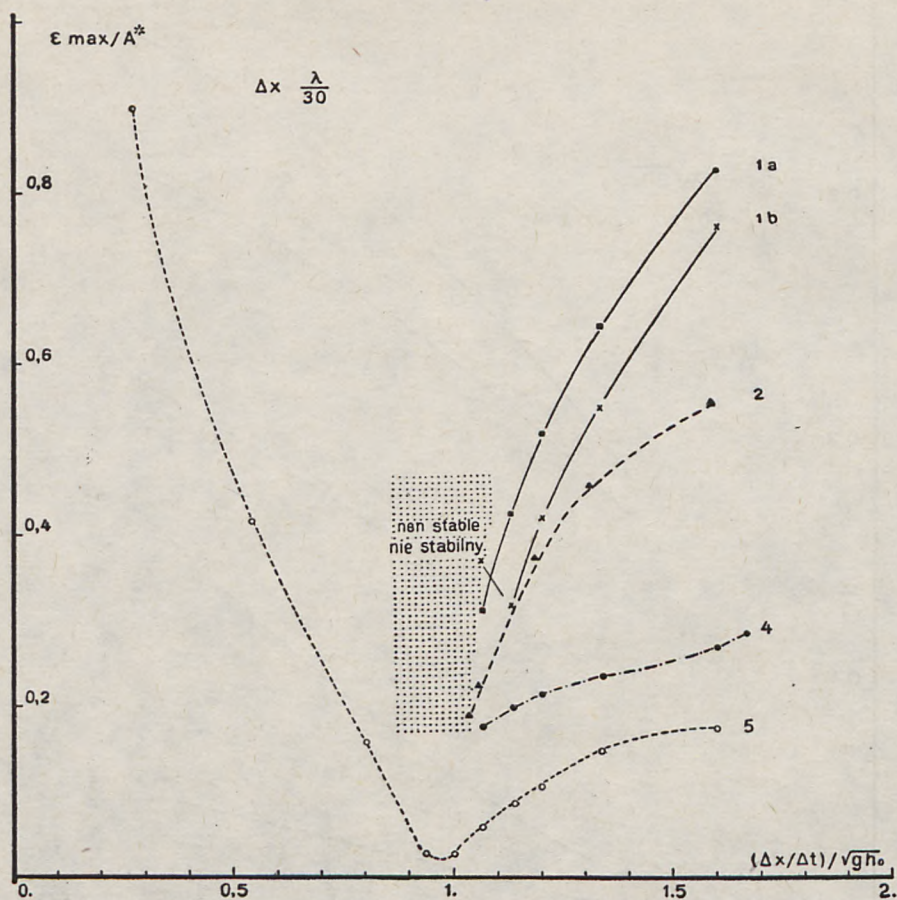


Fig. 7. Influence de la variation du pas de temps pour un pas d'espace donné ( $\Delta x = 0,0333 \lambda$ ) sur l'écart maximal relatif  $\epsilon_{\max}/A^*$ :

- 1 a — schéma diffusif  $\alpha = 0$ ,
- 1 b — schéma diffusif  $\alpha = 0,1$ ,
- 2 — schéma des caractéristiques,
- 4 — schéma de Lax-Wendroff,
- 5 — schéma de Preissmann  $\Theta = 0.50$ .

Ryc. 7. Wpływ zmiany kroku czasowego przy zadanym kroku przestrzennym

( $\Delta x = 0,0333$ ) na wartość maksymalnego rozrzutu względnego  $\frac{\epsilon_{\max}}{A^*}$ :

- 1 a — schemat dyfuzyjny  $\alpha = 0$ ,
- 1 b — schemat dyfuzyjny  $\alpha = 0,1$ ,
- 2 — schemat charakterystyk,
- 4 — schemat Lax-Wendroffa,
- 5 — schemat Preissmanna  $\Theta = 0,50$



Nous avons aussi testé l'influence du rapport (pas d'espace/pas de temps)  $\Delta x/\Delta t$  sur le maximum d'erreur observé: les résultats sont reportés sur la figure 7. Nous constatons que l'optimum dans tous les cas se situe au voisinage de la valeur  $\Delta x/\Delta t = \sqrt{gh}$ , et que l'influence de ce rapport est particulièrement importante pour les schémas des caractéristiques et diffusif. Naturellement, pour tous les schémas explicites, une limite apparaît dans le voisinage de cette valeur optimale: au-delà d'un certain pas de temps, les modèles correspondants sont instables. Par contre, avec le schéma implicite, il est possible, naturellement, d'augmenter la valeur du pas de temps, mais au détriment de la précision; notons cependant que la courbe 5 de cette figure 7 est relative à une valeur du coefficient de pondération  $\Theta = 0,5$ , valeur optimale pour le rapport  $\Delta x/\Delta t \sqrt{gh} = 1$ ; en modifiant  $\Theta$  en fonction de  $\Delta t$ , il est possible de réduire ces écarts, cf. Ligget et Cunge [5].

#### 4. CONCLUSIONS

Au vu de ces résultats, nous sommes conduits à conclure que le schéma implicite utilisé est le mieux adapté au traitement du problème considéré, principalement lorsqu'on cherche à réaliser les calculs avec un maillage espace-temps assez grand: avec des pas d'espace et de temps  $\Delta x = \lambda/30$  et  $\Delta t = T/32$ , l'erreur maximale observée n'est que de quelques pour cent de l'amplitude maximale de l'onde étudiée, alors que pour le schéma diffusif, cette erreur atteint 30% (dans la zone du front d'onde). Par contre, lorsqu'on réduit les tailles du maillage, le schéma de Lax-Wendroff conduit lui aussi à de très bons résultats puisque les erreurs observées pour des maillages  $\Delta x = \lambda/90$  et  $\Delta t = T/96$  deviennent pour ce schéma, comme pour le schéma implicite, inférieurs à 1% de l'amplitude maximale de l'onde étudiée.

Nous n'avons pas pris en compte, dans cette comparaison, les facteurs temps de calcul et encombrements de la mémoire de l'ordinateur, qui sont pourtant deux autres paramètres importants dans une telle comparaison. C'est ce que nous nous proposons de faire dans la suite de ce travail afin de déterminer finalement la méthode optimale pour résoudre le problème que nous nous sommes posé.



CHRISTIAN LE PROVOST  
MELIO SAENZ

Uniwersytet w Grenoble I  
Instytut Mechaniki

SYMULOWANIE NUMERYCZNE NIELINIOWEJ PROPAGACJI  
FALI DŁUGIEJ W KANALE O STAŁEJ GŁĘBOKOŚCI.  
PORÓWNANIE KILKU METOD O RÓŻNICACH SKOŃCZONYCH

Streszczenie

Całkowanie numeryczne równań zupełnych fal pływowych w obszarach płytkowodnych przedstawia szereg trudności, wynikających z obecności wyrazów adwekcyjnych w równaniach ruchu oraz wyrazów nieliniowych w równaniu ciągłości. Przebadano stosowalność kilku algorytmów o różnicach skończonych poprzez porównanie ich z rozwiązaniem dokładnym konkretnego problemu: nieliniowej propagacji fali długiej w kanale o stałej głębokości i nieskończonej długości.

Rozwiązanie analityczne uzyskano metodą charakterystyk. Rozpatrywane różne algorytmy są algorytmami opartymi na: teorii charakterystyk, rozwiązaniu dyfuzyjnym, schemacie Lax-Wendroffa oraz Preissmanna. Podano kilka wniosków odnośnie do dokładności poszczególnych algorytmów.



CHRISTIAN LE PROVOST  
MELIO SAENZ

Academy of Grenoble I  
Institute of Mechanics

THE NUMERICAL SIMULATION OF THE NON-LINEAR  
PROPAGATION OF A LONG WAVE IN A CHANNEL OF CONSTANT  
DEPTH. COMPARISON OF SEVERAL METHODS OF FINITE  
DIFFERENCES

Summary

The numerical integration of the complete equations of tidal waves in shallow waters presents some difficulties arising from the advective terms of the dynamic equations and the non-linear terms of the continuity equation. The behaviour of some finite difference algorithms is compared with reference to the exact solution of a particular problem: the non-linear propagation, of a long wave in a channel of constant depth and infinite length. The analytical solution is obtained by the method of characteristics. The different algorithms considered are the characteristic, the diffusive, the Lax-Wendroff, and the implicit Preissmann schemes. Some conclusions on the accuracy of each of these algorithms are presented.

BIBLIOGRAPHIE

LITERATURA

1. Cunge J.A., *Etude d'un schéma de différences finies appliqué à l'intégration numérique d'un certain type d'équations hyperboliques d'écoulement*, Thèse présentée à la Fac. des Sciences de Grenoble, Mai 1966.
2. Dronkers J.J., *Tidal computation for rivers, coastal areas and seas*, Journ. of Fluid Mechanics, HY 1/Jan. 1969.
3. Lax P.D., *Weak solutions of non linear hyperbolic equations and their numerical computation*, Comm. Pure and Appl. Math. VII, 1954.
4. Lax P.D., Wendroff B., *Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy*, Comm. Pure and Appl. Math. XVII, 1964.
5. Liggett J.A., Cunge J.A., *Applied mathematical modeling of open channel flow, Unsteady flow in open channels*, cf. IV, edited by K. Mahmood and V. Yevjevich, WRP, 1975.
6. Rychtmier R.D., Morton J.W., *Difference method for initial value problems*, John Wiley Sons, 1967.
7. Schonfeld J.C., *Propagation of tides and similar waves*, Staats Drukkeris en Vitgeverijbedrijf/s Gravenhage, 1951.
8. Temperville A., *Sur le calcul des ondes périodiques planes de gravité en eau peu profonde*, C.R.A.S. 272, 29 Mars 1971, série A, 904—907.
9. Temperville A., *Sur le calcul des ondes périodiques planes de gravité en eau peu profonde*, C.R.A.S. 272, 5 Avril 1971, série A, 967—970.