

R O Z P R A W Y

PAPERS

ZYGMUNT CATEWICZ
Polska Akademia Nauk
Zakład Oceanologii — Sopot

ZYGMUNT KOWALIK
Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej
Oddział Morski — Gdynia

**ANALIZA WIDMOWA WEKTOROWYCH WIELKOŚCI PRĄDÓW
MORSKICH METODĄ SKŁADOWYCH ROTACYJNYCH (MSR)
NA PRZYKŁADZIE BAŁTYKU**

Treść: 1. Wstęp, 2. Analiza widmowa zmiennej wektorowej, 3. Składowe rotacyjne prądów w Morzu Bałtyckim; Summary; Literatura.

1. WSTĘP

Metoda analizy widmowej energii dobrze znana jest w literaturze oceanograficznej dla wielkości skalarnych, takich jak temperatura, ciśnienie, wartość bezwzględna prędkości wiatru i prądu morskiego itp. Głównym celem obliczenia widmowej gęstości jest badanie struktury okresowej, która z kolei daje właściwą informację o charakterze badanych procesów fizycznych.

Należy podkreślić, że w przyrodzie mamy do czynienia często ze zmiennymi fizycznymi, jak przyspieszenie, siła, prędkość, które wyznaczamy znając ich wielkość oraz kierunek. Zmienne te, na przykładzie prądów morskich, będą stanowiły ilustrację przedstawionej w tej pracy metody.

Na skutek różnych przyczyn, a między innymi ruchu wirowego Ziemi, składowe wektorów układają się asymetrycznie względem układu osi współrzędnych. Końce wektorów zakreślają drogę w czasie, tworząc tzw. hodograf, którego kształt przyjmuje postać zbliżoną do elipsy. Takie podejście do zagadnienia pozwoli nam uzyskać wiele ciekawych informacji, których nie daje analiza widma wielkości skalarowych. Wykorzystanie zmiennych wektorowych do analizy widmowej pozwala wydzielić nowe okresy drgań, które poprzednio zaznaczały się słabo lub też nie występowały wcale. Analiza takich widm daje nam istotę tej metody — tzn. od-

powieź na pytanie, jaki jest stopień wirowości w mierzonym widmie wielkości wektorowej.

I tak dla danej częstości kątovej wektor prędkości prądu można rozdzielić na dwie składowe, dla których znana jest ich faza względem przyjętego układu współrzędnych. W przebiegu czasowym otrzymamy ciąg tych wektorów, dla których określony jest ruch wirowy o kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Opracowana przez Fofonoffa [2], Genellę [3] i Mooersa [7] metoda analizy widmowej wielkości wektorowych znana jest w literaturze angielskiej jako „Rotary Component Method”.

Ze względu na to, że metoda ta po raz pierwszy zostanie zastosowana w polskiej literaturze oceanograficznej, proponuje się używać polskiej nazwy dla tej metody: „metoda składowych rotacyjnych”, w skrócie MSR.

W niniejszym opracowaniu metodę MSR zastosowano dla pojedynczej serii wektorowej. Należy jednak wspomnieć, że możliwe jest zastosowanie tej metody dla pary wektorów lub też trzech serii wektorów, podobnie jak w przypadku analizy widmowej pojedynczej serii wektorowej [8].

Pracę tę można potraktować jako wstępną analizę metody MSR przy konkretnym jej zastosowaniu do prądów morskich, dla wybranych punktów w Morzu Bałtyckim.

2. ANALIZA WIDMOWA ZMIENNEJ WEKTOROWEJ

Punktem wyjścia tej analizy jest przedstawienie wektora prędkości prądu $\vec{u}(t)$ w postaci zespolonej [3, 7]:

$$u(t) = u_1(t) + i u_2(t) \quad (1)$$

$$(i = \sqrt{-1})$$

gdzie:

t — czas,

$u_1(t)$, $u_2(t)$ — składowe $u(t)$ wzdłuż osi współrzędnych x_1 , x_2 .

Transformatę Fouriera $u(t)$ zapiszemy:

$$u_\omega = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i\omega t} dt = |u_\omega| e^{i\Theta_\omega} \quad (2)$$

gdzie:

T — czas realizacji serii pomiarowej,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ — prędkość kątowa.

Z wyrażenia (2) wyznaczmy amplitudę $|u_\omega|$ i fazę Θ_ω składowej o prędkości kątovej ω . Bardzo istotne jest określenie prędkości kątovej (ω) występującej jako dodatnia ($\omega = +\sigma$) dla ruchu przeciwnego do ruchu

wskazówek zegara i ujemna ($\omega = -\sigma$) dla ruchu zgodnego z ruchem wskazówek zegara. W wyrażeniu (2), dla którego prędkość kątowna będzie wynosić ($-\omega$), $u(t)$ pod całką będzie liczbą sprzężoną $u^*(t)$.

Wielkości współczynników u_ω obliczyć można jako cosinus i sinus współczynników Fouriera składowych $u_{1\sigma}$ i $u_{2\sigma}$ z równania (1), dla wybranej częstości $\sigma = |\omega|$:

$$u_{1\sigma} = B_1(\sigma) \cos(\sigma t) + B_2(\sigma) \sin(\sigma t) \quad (3a)$$

$$u_{2\sigma} = B_3(\sigma) \cos(\sigma t) + B_4(\sigma) \sin(\sigma t) \quad (3b)$$

Równanie (1) przedstawione dla wybranej częstości $\sigma = |\omega|$ w postaci

$$u_\sigma = u_{1\sigma} + iu_{2\sigma} \quad (4)$$

po uwzględnieniu pojęcia dodatniej i ujemnej prędkości kątowej piszemy jako:

$$u_\sigma = u_+ e^{i\sigma t} + u_- e^{-i\sigma t} \quad (5)$$

Porównując wyrażenia (3a) i (3b) z (5) dla danej częstości kątowej σ , otrzymamy składowe prędkości ruchu obrotowego (składowe rotacyjne) dla ruchu zgodnego z ruchem wskazówek zegara u_- i przeciwnego do ruchu wskazówek zegara u_+ :

$$u_- = \frac{1}{2} [(B_1 - B_4) + i(B_3 + B_2)] = |u_-| e^{i\theta_-} \quad (6a)$$

$$u_+ = \frac{1}{2} [(B_1 + B_4) + i(B_3 - B_2)] = |u_+| e^{i\theta_+} \quad (6b)$$

Wprowadzone oznaczenia dla ruchu wirowego składowych u_- i u_+ przedstawia rycina 1, gdzie dla danego wektora u_σ fazy składowych rotacyjnych wynoszą:

$$\theta_+ = \theta + \sigma t \quad (7a)$$

$$\theta_- = \theta - \sigma t \quad (7b)$$

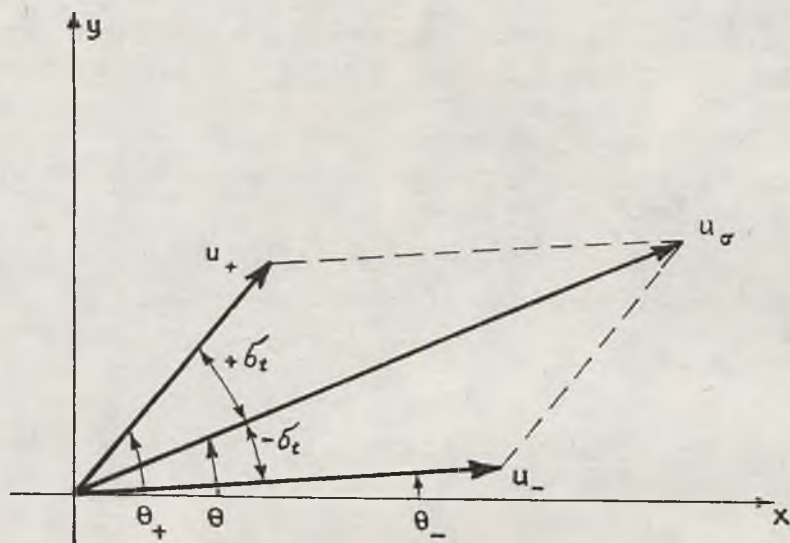
Znając wielkości składowych rotacyjnych z wyrażen (6a) i (6b), przejdziemy do dalszych związków, wykorzystując znane zależności, takie jak:

- P_{uu} i P_{vv} — widma składowych wektora u ,
- P_{uv} — składowa synfazowa wzajemnej gęstości widmowej,
- Q_{uv} — składowa kwadraturowa wzajemnej gęstości widmowej [1—3].

Na wielkość średniej energii kinetycznej lub tzw. widma całkowitego składa się: widmo ujemne W_- (ruch zgodny z ruchem wskazówek zegara) i dodatnie W_+ (ruch przeciwny do ruchu wskazówek zegara).

Widmo ujemne przedstawić można jako:

$$W_- = \frac{1}{2} \langle u_- u_-^* \rangle = \frac{1}{8} (P_{uu} + P_{vv} - 2Q_{uv}) \quad (8)$$



Ryc. 1. Składowe rotacyjne u_- , u_+ wektora u_0
 Fig. 1. Rotational components u_- , u_+ of vector u_0

widmo dodatnie:

$$W_+ = \frac{1}{2} \langle u_+ u_+^* \rangle = \frac{1}{8} (P_{uu} + P_{vv} + 2Q_{uv}) \quad (9)$$

gdzie:

- $\langle \rangle$ — symbol uśrednienia,
 * — wielkość sprzężona liczby zespolonej.

Sumując widma w postaci (8) i (9), otrzymamy znane widmo całkowite:

$$W_c = W_- + W_+ = \frac{1}{4} (P_{uu} + P_{vv}) \quad (10)$$

Inną wielkością charakteryzującą metodę MSR jest współczynnik rotacji wyznaczony przez Fofonoffa [2]:

$$R = \frac{W_- - W_+}{W_c} = \frac{-2Q_{uv}}{P_{uu} + P_{vv}} \quad (11)$$

Współczynnik rotacji R zawarty jest w przedziale $-1 \leq R \leq 1$. Wartość R określa nam podział energii całkowitej zawartej w widmie W_c . Dla czystego ruchu wirowego R wyniesie 1, natomiast zero dla ruchu jednokierunkowego.

Następną wielkością charakteryzującą opisywaną metodę jest średnia orientacja elipsy hodografu:

$$\operatorname{tg} 2 \phi_0 = \frac{2P_{uv}}{P_{uu} - P_{vv}} \quad (12)$$

Wartość średniej orientacji elipsy zawarta jest w przedziale $(0, \pi)$. Z zależności (7a) i (7b) średnia orientacja głównej osi elipsy względem osi współrzędnych x wyniesie $\Theta = \frac{\Theta_+ + \Theta_-}{2}$.

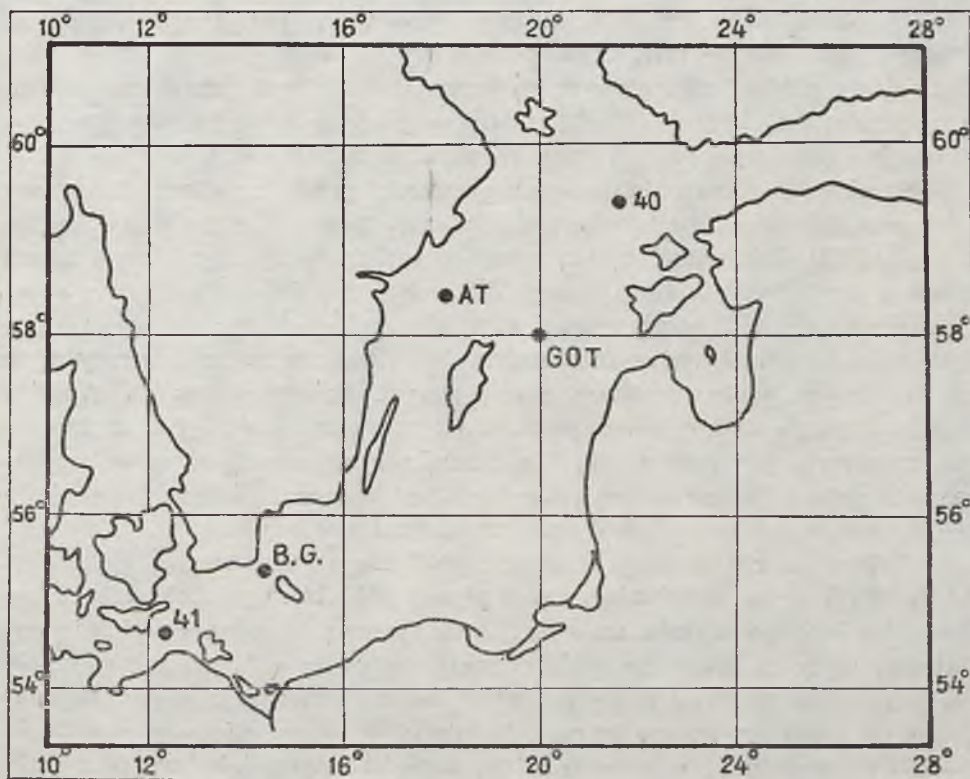
Ostatnią wielkością uzupełniającą metodę MSR jest stabilność orientacji osi głównej elipsy:

$$|S_E|^2 = \frac{(P_{uu} + P_{vv})^2 - 4(P_{uu}P_{vv} - P_{uv}^2)}{(P_{uu} + P_{vv})^2 - 4Q_{uv}^2} \quad (13)$$

Stabilność orientacji osi głównej elipsy zawartej w przedziale $0 \leq S_E \leq 1$ wyznaczono względem kierunku geograficznego N .

3. SKŁADOWE ROTACYJNE PRĄDÓW W MORZU BAŁTYCKIM

Obliczone wielkości, potrzebne do analizy widmowej prądów w Morzu Bałtyckim metodą MSR, przedstawiono na rycinach 4–11. Są to: całkowite, ujemne i dodatnie widmo energii, współczynnik rotacji, średnia orientacja i stabilność orientacji osi głównej elipsy.



Ryc. 2. Punkty pomiaru prądów w Bałtyku w 1964 r.

Fig. 2. Current measurement points in the Baltic in 1964

Do obliczeń wykorzystano dane dotyczące prądów pomierzonych w różnych punktach Bałtyku w czasie trwania Międzynarodowego Roku Bałtyckiego (1964) [9]. Wybór punktów pomiarowych przedstawiono na rycinie 2. Wszystkie widma prądów obliczono stosując algorytm szybkiego przekształcania Fouriera (Fast Fourier Transform) [1].

Najpełniejszą charakterystykę otrzymano dla prądów Głębi Gotlandzkiej, dla której obliczono wszystkie podane wyżej charakterystyki dla poziomu 14, 40 i 100 m z krokiem czasowym $\Delta t = 0,5$ godziny (ryc. 3—5). Otrzymane widma prądów zawierają maksimum energii kinetycznej w przedziale 4—15 godzin. Podstawowy okres równy jest około 14,2 godzin, co związane jest z występowaniem drgań inercyjnych [5].

Okres ten związany jest bezpośrednio z parametrem Coriolisa

$$T = \frac{2\pi}{f} \quad (15)$$

gdzie: $f = 2 \omega \sin \varphi$.

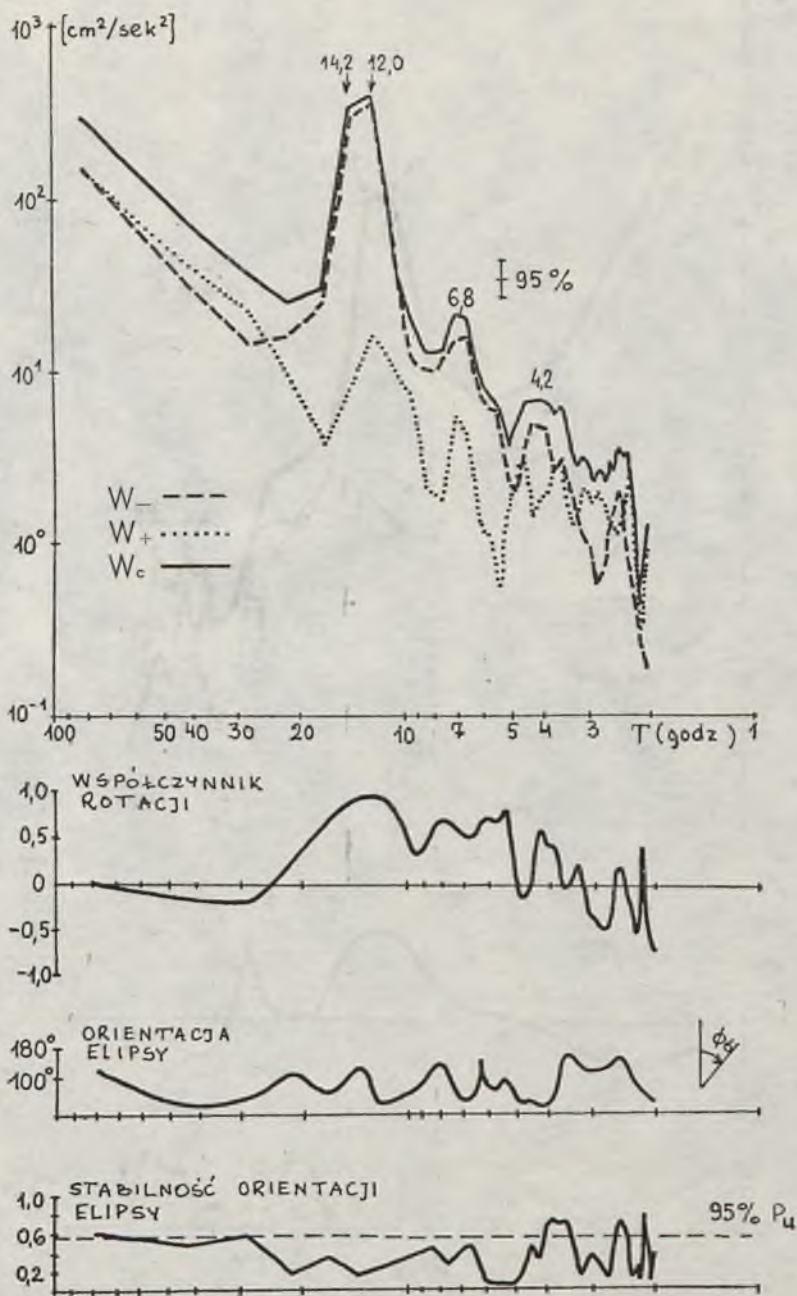
Nieco inną okresowość prądów na Głębi Gotlandzkiej otrzymał Hollan [4]. Obliczył on widma amplitud prędkości prądu dla głębokości 18; 43; 94,5; 144,5 i 205 m, otrzymując charakterystyczne maksimum o okresie 13,5 godzin. Mimo że wielkości pływów w Morzu Bałtyckim są nieznaczne, to jednak okres ich zaznacza się wyraźnie w pobliżu okresu drgań inercyjnych. Jest to tzw. pływ półdobowy o okresie około 12 godzin. Amplitudy prędkości prądów są stosunkowo małe, toteż maksima energii kinetycznej dla okresu 14,2 i 12 godzin są zbliżone do siebie, a nawet wyraźniejsze dla pływu półdobowego na poziomach 14 i 100 m.

Przebieg średnich składowych prędkości prądu na Głębi Gotlandzkiej w zależności od głębokości podany jest w pracy Z. Kowalika i S. Tarnowskiej [5]. Jak widać z załączonej w tej pracy ryciny 6, największa średnia prędkość prądu występuje dla składowej \bar{u} (odpowiada osi skierowanej na wschód) na głębokości 40 m.

Należy nadmienić, że mechanizm powstawania ruchów inercyjnych na znacznych głębokościach nie jest jeszcze dobrze poznany. Analiza charakterystyk widma rotacyjnego dla poziomów 14, 40 i 100 m dostarcza następujących informacji. Dla charakterystycznych okresów współczynnik rotacji na wszystkich poziomach jest bardzo wysoki i wynosi około +1,0, co dowodzi, że ruch jest zbliżony do ruchu rotacyjnego.

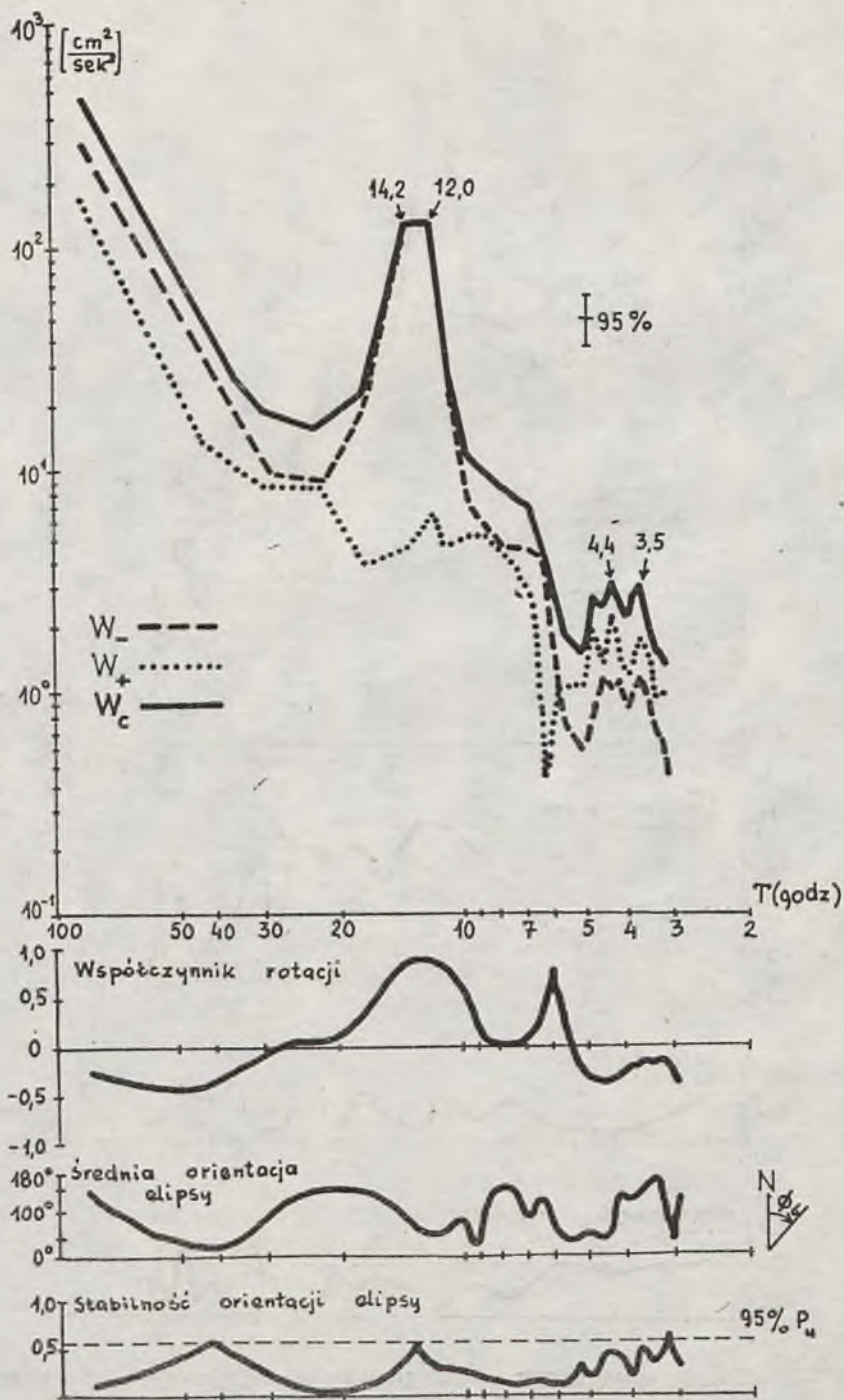
Natomiast najbardziej złożone są widma rotacyjne dla głębokości 14 m. Wydaje się, że oddziaływanie pływu półdobowego o okresie 12 godzin, dla którego maksimum energii jest bardzo wyraźne w widmie dodatnim, wpływa także na widmo energii o okresie drgań inercyjnych. Za potwierdzenie tego może posłużyć średnia orientacja elipsy wyznaczona od kierunku geograficznego N (dla głównej osi elipsy w przedziale 0—180°) i stabilność orientacji elipsy przedstawiona jako współczynnik 0—1.

Dla poziomu 14 m widać, że brak jest stabilności, a wielkość tego



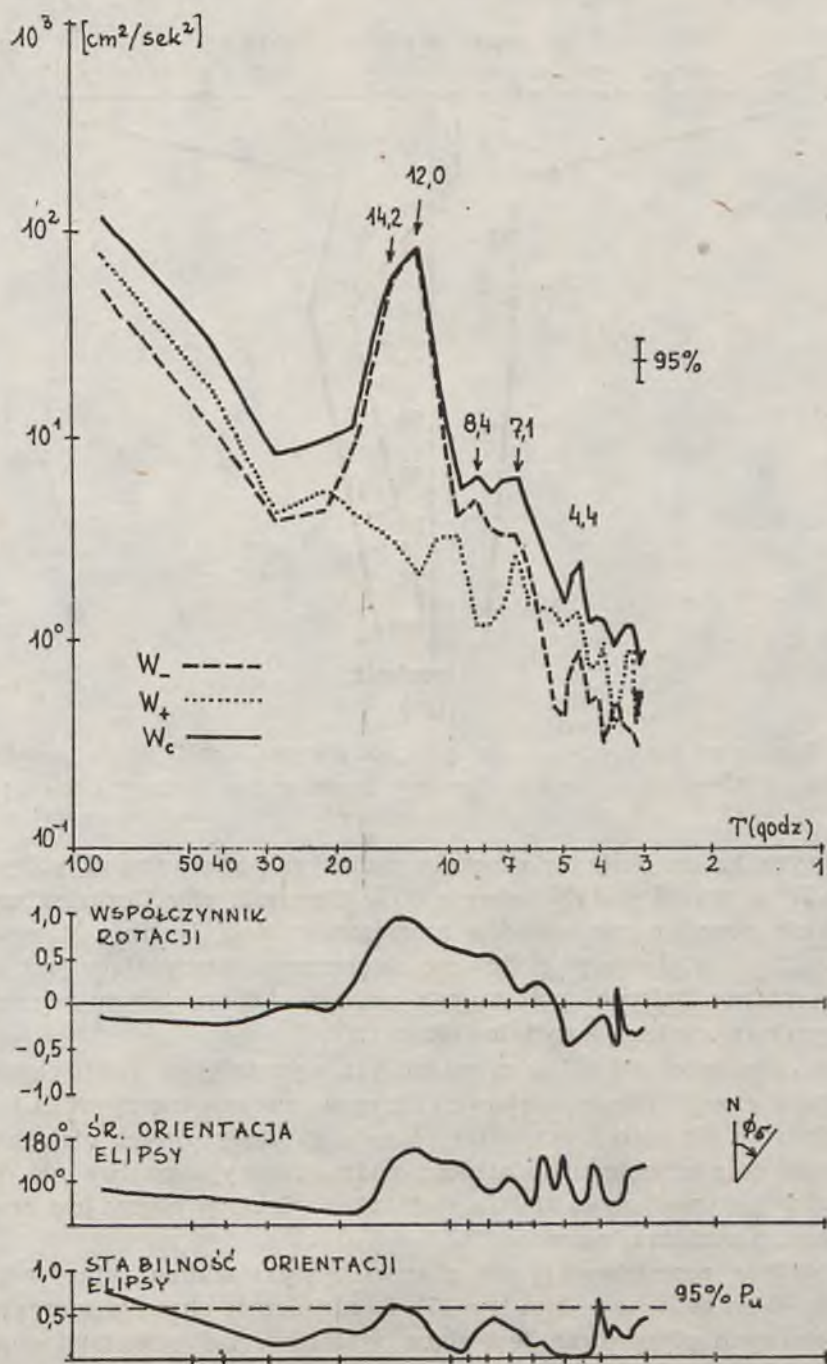
Ryc. 3. Charakterystyki widm rotacyjnych prądów w punkcie GOT — na głębokości 14 m

Fig. 3. Properties of the rotational spectra of sea current measurements. Point GOT — 14 m depth



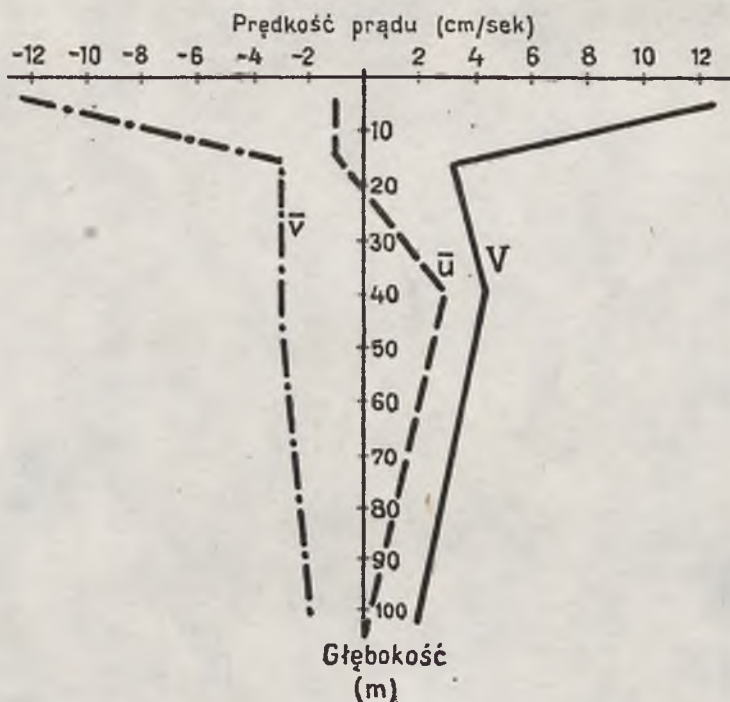
Ryc. 4. Charakterystyki widm rotacyjnych prądów w punkcie GOT — na głębokości 40 m

Fig. 4. Properties of the rotational spectra of sea current measurements. Point GOT — 40 m depth



Ryc. 5. Charakterystyki widm rotacyjnych prądów w punkcie GOT — na głębokości 100 m

Fig. 5. Properties of the rotational spectra of sea current measurements. Point GOT — 100 m depth



Ryc. 6. Średnie prędkości prądu w zależności od głębokości na Głębi Gotlandzkiej [5]

Fig. 6. Mean current velocity against depth, in the Gotland Deep [5]

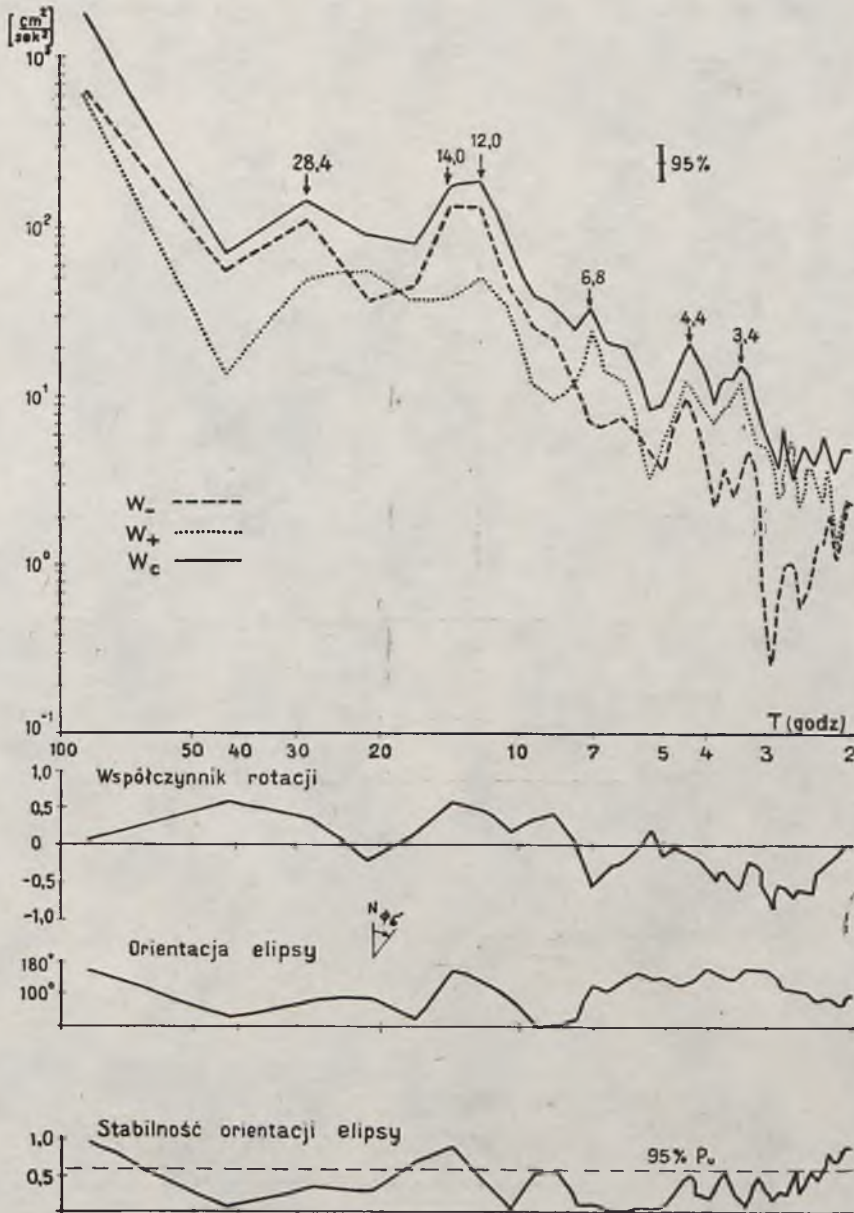
współczynnika znajduje się znacznie poniżej poziomu ufności, który wynosi 0,57, z prawdopodobieństwem 95%. Obecność siły Coriolisa wywołuje także powstawanie układów amfidromicznych. Według Maagarda i Kraussa [6], dla pływów półdobowego słonecznego interesujący jest układ amfidromiczny bałtycki południowo-zachodni, charakteryzujący się w badanym punkcie linią kotydałną około 120° .

Dla poziomów 40 i 100 m widać już wyraźniejsze rozdzielenie się maksimum energii odpowiadających okresowi ruchów inercyjnych i okresowi pływów. Na głębokości 100 m okres drgań inercyjnych nie zaznacza się; widać to z przebiegu dodatniego widma rotacyjnego. Średnia orientacja elipsy wynosi około 180° , a stabilność orientacji elipsy jest znaczna i przekracza poziom ufności.

Podobnie przedstawiają się charakterystyki widma rotacyjnego w punkcie 40 na głębokości 5 m (ryc. 7). Rozdzielczość okresów inercyjnych i półdobowych pływowych jest słaba, stabilność zaś orientacji elipsy z kolei jest bardzo duża. W punkcie tym interesująco zaznacza się maksimum energii dla okresu 6,8 godzin. Nie występuje tu widmo ujemne, co potwierdzone jest przez współczynnik rotacji, wynoszący około $-0,6$.

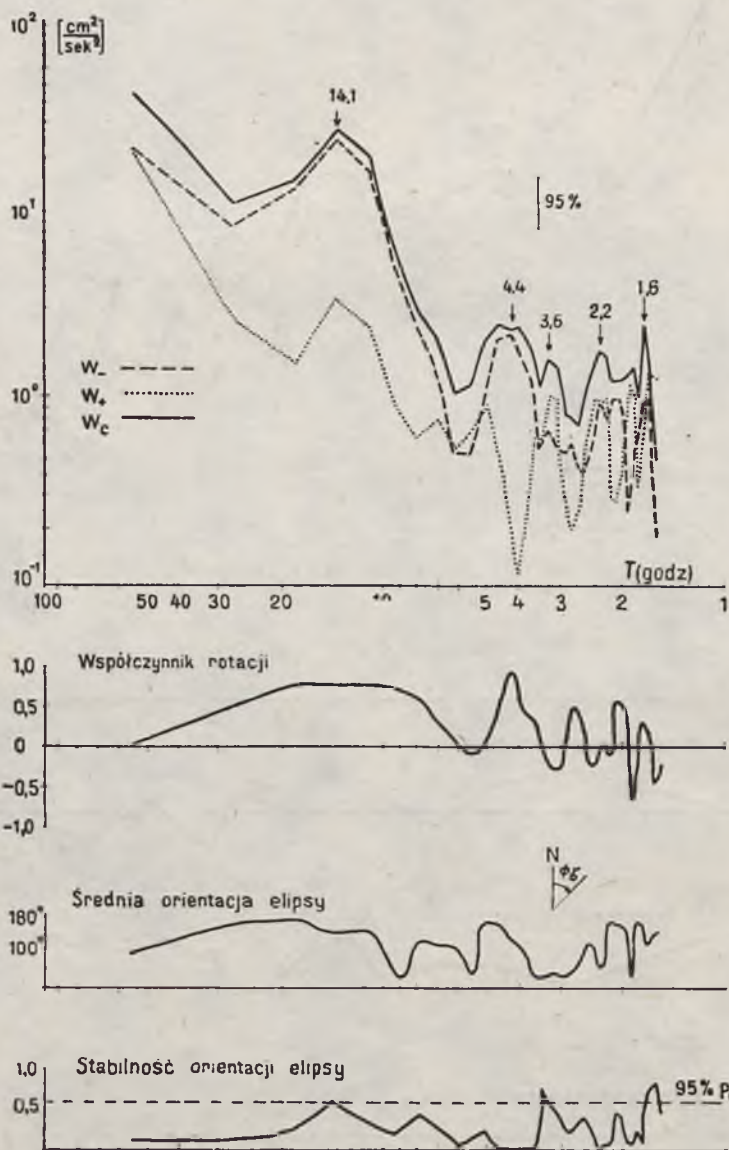
W punkcie AT na poziomie pomiaru 80 m okres drgań inercyjnych, wynoszący 14,1 godzin, potwierdzony jest przez wszystkie charakterysty-

ki widma rotacyjnego (ryc. 8). Istotę widm rotacyjnych określa maksimum energii dla okresu 4,4 godzin. Udział energii kinetycznej widma dodatniego jest w punkcie AT prawie niewidoczny. Potwierdza to współczynnik rotacji (około $+1,0$) oraz stabilność orientacji elipsy, która wynosi prawie zero.



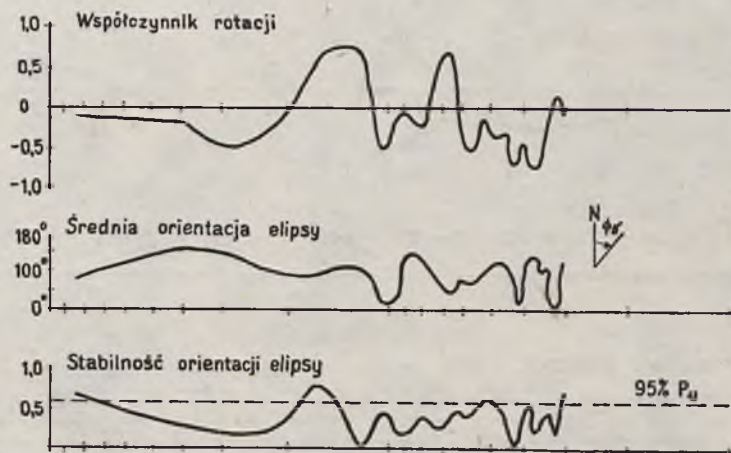
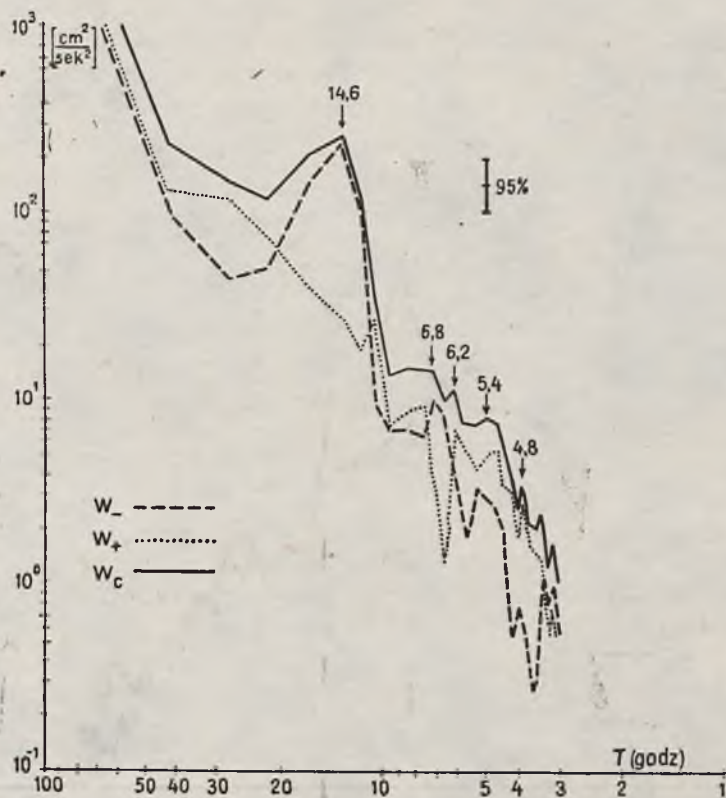
Ryc. 7. Charakterystyki widm rotacyjnych prądów w punkcie 40 — na głębokości 5 m
 Fig. 7 Properties of the rotational spectra of sea current measurements. Point 40 —
 5 m depth

Godne uwagi są rozkłady widm rotacyjnych wyznaczone dla punktu usytuowanego w Bramie Bornholmskiej (B.G.) na poziomie 25 i 29 m (ryc. 9, 10). W punkcie tym występuje bardzo wyraźnie maksimum energii kinetycznej, przypadające na okres drgań inercyjnych, wynoszący około 14,6 godzin. Natomiast nie występuje okres pływu półdobowego. Wydaje się, że spowodowane to jest tym, że Brama Bornholmska leży



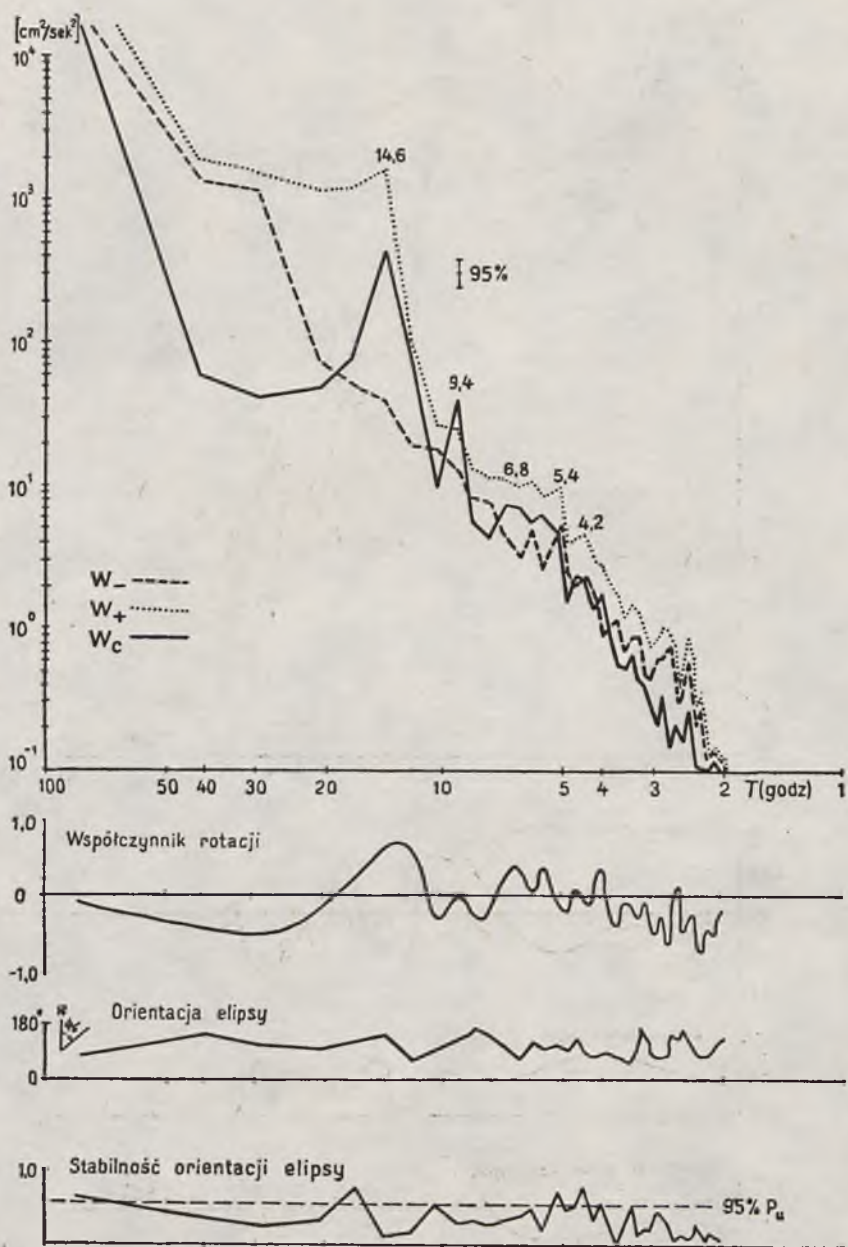
Ryc. 8. Charakterystyki widm rotacyjnych prądów w punkcie AT — na głębokości 80 m

Fig. 8. Properties of the rotational spectra of sea current measurements. Point AT — 80 m depth



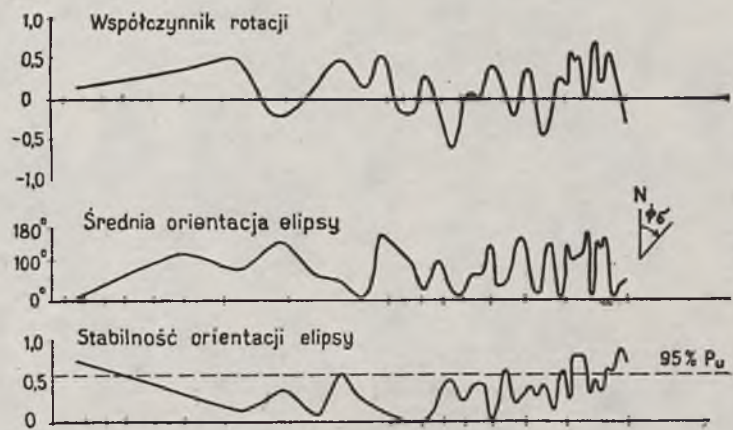
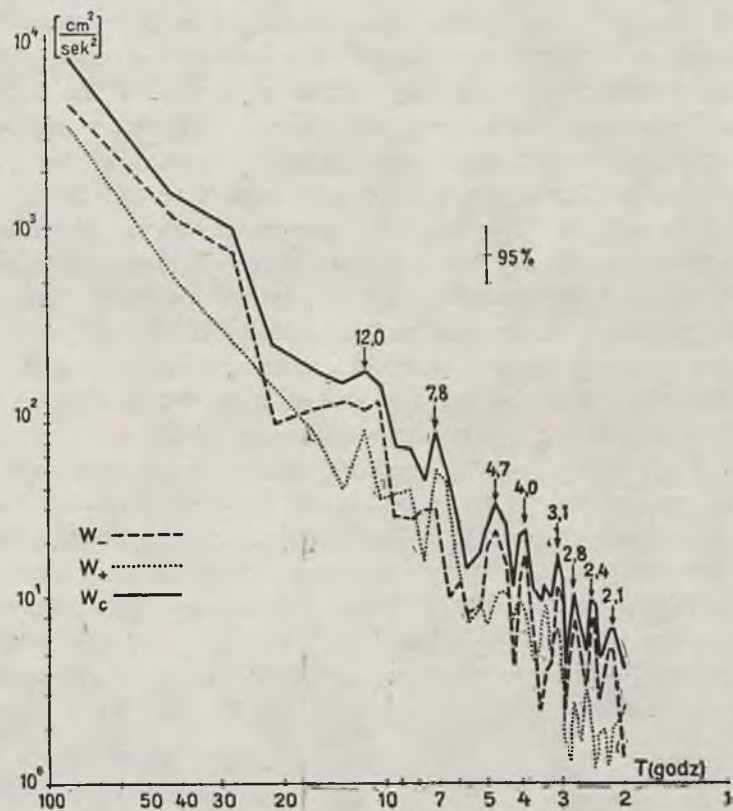
Ryc. 9. Charakterystyki widm rotacyjnych prądów w punkcie B.G. — na głębokości 25 m

Fig. 9. Properties of the rotational spectra of sea current measurements. Point B.G. — 25 m depth



Ryc. 10. Charakterystyki widm rotacyjnych prądów w punkcie B.G. — na głębokości 29 m

Fig. 10. Properties of the rotational spectra of sea current measurements. Point B.G. — 29 m depth



Ryc. 11. Charakterystyki widm rotacyjnych prądów w punkcie 41 — na głębokości 5 m

Fig. 11. Properties of the rotational spectra of sea current measurements. Point 41 — 5 m depth

w pobliżu punktu amfidromicznego układu południowo-zachodniego. Inne charakterystyki widm rotacyjnych potwierdzają taki układ.

Zupełnie inaczej układają się widma w punkcie 41 na poziomie 5 m (ryc. 11). Brak jest okresu odpowiadającego drganiom inercyjnym, co spowodowane jest lokalizacją tego punktu. Zauważyć też można, że maksimum energii kinetycznej odpowiadające okresowi pływowemu jest jedynym okresem, w którym określenie charakterystyk widm rotacyjnych jest możliwe. Należy też zwrócić uwagę na okres około 6,8 godzin, w którym nastąpiło odwrócenie zjawiska, określone dużą wartością ujemną współczynnika rotacji oraz stabilnością orientacji elipsy, co zostało stwierdzone także w innych punktach pomiaru prądów w Bałtyku.

Reasumując, należy stwierdzić, że metoda składowych rotacyjnych (MSR) może być bardzo przydatna do badań oceanograficznych. W porównaniu z analizą widmową wielkości skalarowych daje ona wiele nowych, nie znanych dotychczas wyników. Zastosowanie tej metody dla prądów w wybranych punktach Bałtyku pokazało, oprócz potwierdzenia znanej z innych prac struktury okresowej, nowe, a nie zaznaczające się tak wyraźnie poprzednio okresy drgań. Wiele nowych informacji wniosły także inne charakterystyki widm rotacyjnych, takie jak współczynnik rotacji, średnia orientacja elipsy oraz jej stabilność w stosunku do wyznaczonego kierunku.

ZYGMUNT CATEWICZ
Polish Academy of Science
Institute of Oceanology — Sopot

ZYGMUNT KOWALIK
Institute of Meteorology and Water Management
Maritime Branch — Gdynia

SPECTRAL ANALYSES OF VECTOR MAGNITUDES BY THE ROTARY COMPONENTS METHOD (RCM) ON THE EXAMPLE OF CURRENTS IN THE BALTIC SEA

Summary

A rotary-component method for analysing the vector time series was developed in recent years by Fofonoff [2], Gonella [3] and Mooers [7]. In this paper the method is applied to study the time series of current velocity in the Baltic. For the given angular frequency, the rotary velocity is split into clockwise (u_-) and anti-clockwise (u_+) motion. The rotary component of velocity obtained enables the negative W_- (clockwise spectrum) and positive spectrum W_+ (anticlockwise spectrum) to be computed. The total spectrum, as a measure of mean kinetic energy, equals $W_0 = W_+ + W_-$. For the time series of current velocity at chosen points in the Baltic, the computation of the above mentioned spectra and such characteristics as rotary coefficient, mean orientation and stability of orientation of the major axis of ellipse has been carried out.

The complete analysis of rotary spectra was obtained from measurements performed in the Gotland Deep at 14 m, 40 m and 100 m levels. The main period due to the inertial oscillations appears at all levels. The 12 h tide occurs near the inertial oscillation. The rotational nature is confirmed by the high value of the rotary coefficient, which equals ± 1.0 on every level examined. The characteristics of rotary spectra in other points of the Baltic vary greatly. It seems that this phenomenon may be related to the influence of local conditions on the flow.

LITERATURA

REFERENCES

1. Catewicz Z., *Metodyka zastosowania algorytmu FFT na przykładzie prądów Zatoki Gdańskiej*, Studia i Materiały Oceanologiczne, nr 16, 1976.
2. Fofonoff N., *Spectral characteristics of internal waves in the ocean*, Deep Sea Research, Supplement to Vol. 16, 1969.

3. Gonella J., *A rotary-component method for analysing meteorological and oceanographical vector time series*, Deep Sea Research, Vol. 19, 1972, No. 12.
4. Hollan E., *Die Veränderlichkeit der Strömungsverteilung im Gotland-Becken am Beispiel von Strömungsmessungen im Gotland-Tief*, Kieler Meeresf., Bd. 25, 1969, H.1.
5. Kowalik Z., Taranowska S., *Horizontal large-scale turbulence in the Baltic Sea*, Cahiers Oceanographiques, 19, 1967, 4.
6. Maaßgard L., Krauss W., *Spektren der Wasserstandsschwankungen der Ostsee im Jahre 1958*, Kieler Meeresf., Bd. 19, 1966, H. 2.
7. Mooers C., *A technique for the cross spectrum analysis of pairs of complex-valued time series on properties of polarized components and rotational invariant*, Deep Sea Research, Vol. 20, 1973, No. 12.
8. Yao N., Neshyba S., Crew H., *Rotary cross-bispectra and energy transfer functions between non-Gaussian vector processes*, Journal of Physical Oceanography, Vol. 5, 1975, No. 1.
9. *Cooperative Synoptic Investigation of the Baltic 1964*, ICES oceanographic data lists, ICES, Copenhagen 1968, Vol. 2, 4, 5.